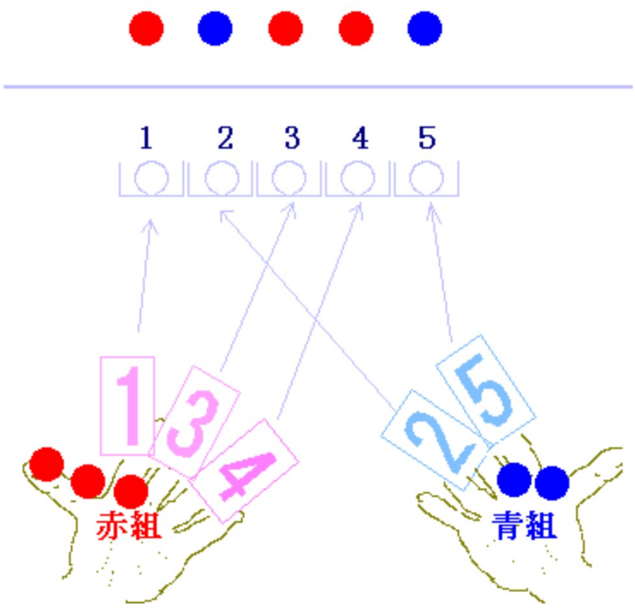
== 番号札のもらい方 ==

～「同じものがあるときの順列の総数」は「組合せ」に等しい～

《解説》

■例1 「同質の赤玉3個，青玉2個を一列に並べる方法は何通りあるか」という問題を**組合せ**で考えてみます.



右上の図のような並べ方は，「並べた玉を動かす」という考え方以外に，「受付で番号札をもらう」という考え方でもできます.
赤組は玉を3個並べるので，受付で番号札を3枚もらいます.青組は番号札を2枚もらいます.番号札には，座席が書かれていて，1番の番号札をもらえば1番のところに並べる，2番の番号札をもらえば2番のところに並べる･･･というように決めます.

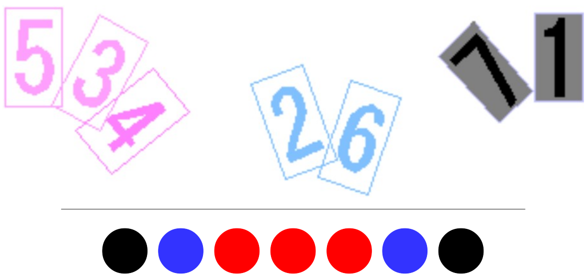
下の図は，赤組が1，3，4の番号札，青組が2，5の番号札をもらったようすを表しています.このとき，玉の並べ方はちょうど上の図のようになります.

結局，同質の赤球3個，青玉2個を一列に並べる方法は，**1から5までの番号札のうち赤が行き先の番号札3枚をもらえば**決まります.(青の行き先は残り2か所で，これは赤が決まれば自動的に決まります.)
だから$_5C_3$＝10通りです.･･･（答）

青の行き先を先に決めても同じことになります：1から5までの番号札から青の行き先の番号札2枚をもらう方法は
$_5C_2$＝10通りです.
（このとき赤の行き先は，残りの3か所です.）

このように，「並べ方の問題」なのに「組合せ」で解けるのは，**番号札の組合せが並べ方を表している**からです.

■例2 「同質の赤球3個，青玉2個，黒玉2個を一列に並べる方法は何通りありますか」



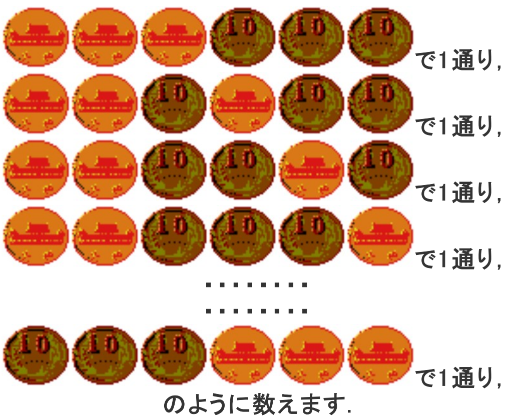
右の図は，1から7までの番号札のうち，赤組が5，3，4を，青組が2，6を，黒組が7，1をもらったようすを表しています.このときの並べ方は，下の図のようになります.

このように考えると，問題の並べ方は，1から7の7枚の番号札のうち，赤の行き先を3枚、残りから青の行き先を2枚，(その残りは黒の行き先)というように番号札をもらう方法に等しいので，

$_7C_3 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2$＝210通り･･･（答）

（$_2C_2$は1です.書いても書かなくてもよろしい.）

■例3 「10円硬貨を6回投げるとき，表が3回出るのは何通りありますか」



右の図において，一番上の図は，1から6の番号札のうち表組が1，2，3の3枚の番号札をもらった場合を表しています.
･･････
一番下の図は，表組が4，5，6の3枚の番号札をもらった場合を表しています.

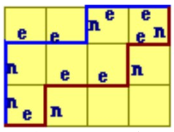
1から6までの6枚の番号札のうち，表の行き先の番号札3枚をもらう方法は

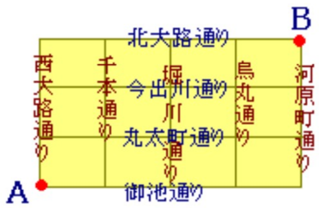
$_6C_3$＝20通り･･･（答）

■例4 「右図のような街路があるとき，A地点からB地点へ最短経路で行く方法は何通りありますか」

同じものがあるときの順列で考える方法もありますが，組合せでは次のように考えることができます．

下の図で，北へ進むことをnで，東へ進むことをeで表すと，青色の順路はnneenee，茶色の順路はeneenenとなります．





どの順路もnが3個，eが4個あります.青色の順路はnが1，2，5の番号札をもらった場合に対応します.茶色の順路は，nが2，5，7の番号札をもらった場合に対応します．
このように，1から7番のうちでnの現れる番号を3枚もらえば順路が決まります．

${}_7C_3$＝35通り・・・（答）

《問題》

≪1≫
aが4個，bが3個あるとき，これらを並べ替えてできる順列の総数を求めなさい．

6　10　15　26　32　35　60

70　126　210　280　420

行き先の番号札1～7のうちで a の行き先の番号札を4枚もらえば並び方が決まるから ${}_7C_4=35$ 通り
（b の行き先の番号札を3枚もらう方法と考えても同じ ${}_7C_3=35$ 通り）

≪2≫
白玉2個，赤玉3個，青玉1個を一列に並べる方法は何通りありますか．

6　10　15　26　32　35　60

70　126　210　280　420

行き先の番号札1～6のうちから白玉の行き先の番号札を2枚もらう方法は ${}_6C_2=15$ 通り
残り4枚のうちから赤玉の行き先の番号札を3枚もらう方法は ${}_4C_3=4$ 通り
残り1枚は青玉の行き先の番号札になる ${}_1C_1=1$ 通り
積の法則により $15\times4\times1=60$ 通り

≪3≫
10円硬貨を10回投げるとき，表が4回出る場合は何通りありますか．

6　10　15　26　32　35　60

70　126　210　280　420

表の出る番号札を4枚もらえば出方が決まるから ${}_{10}C_4=210$ 通り

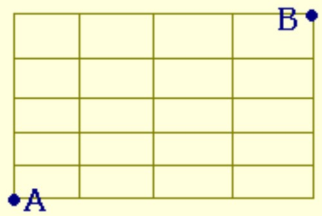
≪4≫
5枚の硬貨を投げるとき，2枚以上表が出る場合は何通りありますか．

6　10　15　26　32　35　60

70　126　210　280　420

表裏の出方の総数は $2^5=32$ 通り
そのうち全部裏となるのが 1 通り
表が1枚出るのは、5枚の番号札の中から表の出る番号を1枚もらう方法に等しく ${}_5C_1=5$ 通り
$32-(1+5)=26$ 通り

≪5≫
右図のような街路があるとき，A地点からB地点へ行く最短経路は何通りありますか．



6　10　15　26　32　35　60

70　126　210　280　420

縦横に進む順番1～9のうちで横に進む番号札を4枚もらえば進み

≪6≫
赤玉4個，白玉3個を白玉同士が隣り合わないように一列に並べる方法は何通りありますか．

6　10　15　26　32　35　60

70　126　210　280　420

赤玉を並べておき、その両端を含む5個の隙間に番号札1～5置いておく。これら5枚の番号札のうち白玉の行先となる番号札を3枚もらってくれば、白玉が隣り合わない並べ方になるから ${}_5C_3=10$ 通り

方が決まるから $_9C_4=126$ 通り
（縦に進む番号札を5枚もらう方法と考えても同じ $_9C_5=126$ 通り）

≪7≫
赤玉4個，白玉3個，青玉2個の合計9個の玉を一列に並べるとき，青玉が隣り合う並べ方は何通りありますか．

6　10　15　26　32　35　60
70　126　210　280　420

○ 解説

赤玉4個、白玉3個、青玉1セットの計8個のものを並べる。
赤玉の行先は $_8C_4=70$ 通り
白玉の行先は $_4C_3=4$ 通り
（青セットは残り）
積の法則により $70\times4\times1=280$ 通り

≪8≫
a，a，a，b，b，cの6文字のカードを机の上に円形に並べる方法は何通りありますか．

6　10　15　26　32　35　60
70　126　210　280　420

○ 解説

1列に並べるときは $_6C_3\times{}_3C_2\times{}_1C_1=60$ 通り
円順列だから $60\div6=10$ 通り