

== 平方完成(基本) ==

【平方完成の変形1】

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

だから、右辺から書くと

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

$a^2$  を移項すると

$$x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$$

$2a = A$  とおくと

$$x^2 + Ax = (x + \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2 \dots(1)$$

【例題1】 次の式を平方完成してください。  
 $x^2 + 6x$

(解答)

(A方式) 次のように考えるのが普通

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 3^2 = (x+3)^2 - 9$$

半分      その2乗

※元のもの: 6  
の2乗ではない

(B方式) 数学が苦手な人は、つぎのように考えてもよい。

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2$$

とにかく2乗の展開式を作る      勝手に足した分を引いておく

$$= (x+3)^2 - 3^2 = (x+3)^2 - 9$$

※数学がもっと苦手な人は、1次の  $x$  を付けたままにしていることがあります、それは完全な間違いです。1次の係数だけを連れてきます。

$$x^2 + 6x = (x+3x)^2 - 9 \leftarrow (\text{間違い})$$

$$x^2 + 6x = (x^2 + 3x)^2 - 9 \leftarrow (\text{間違い})$$

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9 \leftarrow (\text{正しい})$$

【平方完成の変形2】

先に述べた公式(1)は、 $A$  が負の数でも成り立つが、符号で間違える生徒が多いので、分けて書いてみると。

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

このところで、 $+a^2$  となることが最後まで影響する

右辺から書くと

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

$a^2$  を移項すると

$$x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$$

$2a = A$  とおくと

$$x^2 - Ax = (x - \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2 \dots(2)$$

このように、 $x^2 - Ax$  を平方完成した場合も、最後が「引き算になる」ことに注意

【例題2】 次の式を平方完成してください。

【問題1】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1)  $x^2 + 2x$

$(x+1)^2 - 1$        $(x-1)^2 + 1$   
 $(x+2)^2 - 4$        $(x-2)^2 + 4$

(2)  $x^2 + 4x$

$(x+1)^2 - 1$        $(x+2)^2 - 4$   
 $(x+4)^2 - 16$        $(x+8)^2 - 16$

(3)  $x^2 + 8x$

$(x+4)^2 - 2$        $(x+4)^2 - 4$   
 $(x+4)^2 - 8$        $(x+4)^2 - 16$

【問題2】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1)  $x^2 - 4x$

$(x-2)^2 + 4$        $(x-2)^2 - 4$   
 $(x-4)^2 + 16$        $(x-4)^2 - 16$

(2)  $x^2 - 10x$

$(x-5)^2 + 25$        $(x-5)^2 - 25$   
 $(x-10)^2 + 100$        $(x-10)^2 - 100$

$$x^2-8x$$

(解答)

(A方式)

$$(x-4)^2-4^2=(x-4)^2-16$$

(B方式)

とにかく2乗の展開式を作る  
と  $x^2-8x+16$  だから

$$x^2-8x+16-16$$

$$=(x-4)^2-16$$

**\*\* 危険な落とし穴 \*\***  
カッコ内のマイナスをプラスで  
打ち消そうとしてはダメ

$$(x-4)^2+16 \text{ は } \times$$

$$(x-4)^2-16 \text{ が } \bigcirc$$

$(x-4)^2=x^2-8x+16$   
だから「引かないと合わない」

$$(3) \quad x^2-6x$$

$$(x-6)^2+12$$

$$(x-6)^2-36$$

$$(x-3)^2-6$$

$$(x-3)^2-9$$

**【例題3】** 次の式を平方完成してください。

$$x^2+3x$$

(解答)

1次の係数が奇数: 3 のときは, その半分は分数になる.

$$x^2+3x=(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$$

(B方式なら)

$$x^2+3x=x^2+2\cdot\frac{3}{2}x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2$$

$$=(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$$

**【問題3】** 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

こちら辺から暗算では無理になりますので, 計算用紙を使って計算してから教えてください。  
まぐれで当たっても実力は付きません。

$$(1) \quad x^2+5x$$

$$(x+5)^2-\frac{5}{2}$$

$$(x+5)^2-5$$

$$(x+\frac{5}{2})^2-5$$

$$(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$$

$$(2) \quad x^2+9x$$

$$(x+9)^2-18$$

$$(x+9)^2-81$$

$$(x+\frac{9}{2})^2-5$$

$$(x+\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4}$$

$$(3) \quad x^2+x$$

$$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$$

$$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$$

$$(x+1)^2-1$$

$$(x+1)^2-\frac{1}{4}$$

**【例題4】** 次の式を平方完成してください。

$$x^2-5x$$

(解答)

1次の係数が奇数: 5 のときは, その半分は分数になる.

$$x^2-5x=(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$$

$$(2) \quad x^2-7x$$

$$(x-\frac{7}{2})^2-\frac{49}{2}$$

$$(x-\frac{7}{2})^2-\frac{49}{4}$$

$$(x-7)^2+\frac{7}{2}$$

$$(x-7)^2-\frac{49}{4}$$

(B方式なら)

$$x^2 - 5x = x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$

【問題4】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1)  $x^2 - 3x$

$(x-3)^2 - \frac{3}{2}$        $(x-3)^2 - \frac{3}{4}$

$(x-\frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}$        $(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}$

(3)  $x^2 - \frac{1}{2}x$

$(x-\frac{1}{2})^2 - 1$        $(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$

$(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{2}$        $(x-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}$

【平方完成の変形3】

$x^2$ の係数が1以外するとき、平方完成の変形を行うには、初めにその係数をくり出して $x^2$ の係数が1になるようにします。

【例】  $2x^2 + 4x = 2(x^2 + 2x)$

この形にしてから、( )の中を今までやってきた方法で平方完成します。

$$= 2\{(x+1)^2 - 1\}$$

最終的に答えの形にするときは「外側の{ }をはずして」答えます。

$$= 2(x+1)^2 - 2$$

※内側の( )をはずしてしまうと、元に戻ってしまうので注意。

【変形の注意点】

1) カッコを「はずす」ときは、係数を「掛ける」ので、その逆にかっこで「くくる」ときは、係数で「割ります」。

かっこをはずす →  $3(x^2 + 2x) = 3x^2 + 6x$

かっこでくくる →  $3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$

2) マイナスの係数でくくるときは、1次の係数の符号も変わります。

間違い計算 →  $-3x^2 + 6x = -3(x^2 + 2x)$

※この計算間違いはビックリするほど多いので気を付けましょう!

正しい計算 →  $-3x^2 + 6x = -3(x^2 - 2x)$

3) 整数の係数でくくるとき、係数はその整数で「割ったもの」になります。

これに対して、分数の係数でくくるとき、係数はその分数で「割ったもの」になります。分数で割るには逆数を掛けます。

整数でくくる →  $3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$

分数でくくる →  $\frac{1}{3}x^2 + 2x = \frac{1}{3}(x^2 + 6x)$

※「あやしい」「よくわからない」と思ったら、かっこをはずしたと

【問題5】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1)  $2x^2 + 4x$

$2(x+2)^2 - 2$        $2(x+2)^2 - 4$

$2(x+1)^2 - 1$        $2(x+1)^2 - 2$

(2)  $3x^2 - 12x$

$3(x-2)^2 - 4$        $3(x-2)^2 - 12$

$3(x-6)^2 - 9$        $3(x-6)^2 - 36$

(3)  $-x^2 + 6x$

$-(x-3)^2 - 9$        $-(x-3)^2 + 9$

$-(x+3)^2 - 9$        $-(x+3)^2 + 9$

きに元に戻るかどうか目で確かめるようにします。

※マイナスの符号と分数の係数が混ざると、間違いが非常に多くなる傾向がありますので、幾つか例を示しておきます。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 + x &= \frac{1}{2}(x^2 + 2x) \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x &= \frac{1}{2}(x^2 - 8x) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 6x &= -\frac{1}{2}(x^2 - 12x) \\ -\frac{1}{2}x^2 - 5x &= -\frac{1}{2}(x^2 + 10x)\end{aligned}$$

**4) 定数項があるとき、定数項は平方完成の計算に参加せずに外に置いたままにします。**

定数項があるときに、かっこの内側に入れてしまうと、最後に再び外側に出さなければなりません。出したり入れたりすると、計算間違いの元ですから、外に置いたままにして、平方完成から出てくる定数項と差し引きして答えます。

まずい計算 →  $2x^2 + 4x + 1 = 2(x^2 + 2x + \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned}&= 2\left\{(x+1)^2 - 1 + \frac{1}{2}\right\} \\ &= 2\left\{(x+1)^2 - \frac{1}{2}\right\} \\ &= 2(x+1)^2 - 1\end{aligned}$$

よい計算 →  $2x^2 + 4x + 1 = 2(x^2 + 2x) + 1$

$$\begin{aligned}&= 2\{(x+1)^2 - 1\} + 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 2 + 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 1\end{aligned}$$

(4)  $-2x^2 - 8x$

$$\begin{aligned}-2(x+2)^2 + 8 & \quad -2(x+2)^2 - 8 \\ -2(x-2)^2 + 8 & \quad -2(x-2)^2 - 8\end{aligned}$$

**【問題6】** 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

暗算ではできません。計算用紙を使って計算してから答えてください。  
まぐれで正解になっても実力は付きません。

(1)  $\frac{1}{2}x^2 + 2x$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1 & \quad \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 \\ \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 & \quad \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4\end{aligned}$$

(2)  $\frac{1}{3}x^2 - 2x$

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(x-1)^2 - 1 & \quad \frac{1}{3}(x-1)^2 - 3 \\ \frac{1}{3}(x-3)^2 - 3 & \quad \frac{1}{3}(x-3)^2 - 9\end{aligned}$$

(3)  $-\frac{1}{2}x^2 + x$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} & \quad -\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 & \quad -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1\end{aligned}$$

(4)  $-\frac{2}{3}x^2 - 4x$

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}(x-3)^2 + 6 & \quad -\frac{2}{3}(x-3)^2 - 6 \\ -\frac{2}{3}(x+3)^2 + 6 & \quad -\frac{2}{3}(x+3)^2 - 6\end{aligned}$$

【問題7】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1)  $2x^2 + 8x + 5$

$2(x+2)^2 - 4$        $2(x+2)^2 - 3$

$2(x+2)^2 + 1$        $2(x+2)^2 + 3$

(2)  $2x^2 - 4x + 3$

$2(x-1)^2 + 1$        $2(x-1)^2 + 2$

$2(x-1)^2 - 1$        $2(x-1)^2 - 2$

(3)  $x^2 - 3x + 1$

$(x-3)^2 - 8$        $(x-3)^2 + 10$

$(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{2}$        $(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$

(4)  $-x^2 + x - 2$

$-(x+1)^2 - 3$        $-(x-1)^2 - 1$

$-(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{7}{4}$        $-(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$