

== 平方完成(基本) ==

【平方完成の変形1】

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

だから、右辺から書くと

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x+a)^2$$

a^2 を移項すると

$$x^2 + 2ax = (x+a)^2 - a^2$$

$2a = A$ とおくと

$$x^2 + Ax = (x + \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2 \dots (1)$$

【例題1】 次の式を平方完成してください。
 $x^2 + 6x$

(解答)

(A方式) 次のように考えるのが普通

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 3^2 = (x+3)^2 - 9$$

半分 その2乗

※元のもの: 6
の2乗ではない

(B方式) 数学が苦手な人は、つぎのように考えてもよい。

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot 3x + 3^2 - 3^2$$

とにかく2乗の展開式を作る 勝手に足した分を引いておく

$$= (x+3)^2 - 3^2 = (x+3)^2 - 9$$

※数学がもっと苦手な人は、1次の x を付けたままにしていることがあります。それは完全な間違いです。
 1次の係数だけを連れてきます。

$$x^2 + 6x = (x+3x)^2 - 9 \leftarrow (\text{間違い})$$

$$x^2 + 6x = (x^2 + 3x)^2 - 9 \leftarrow (\text{間違い})$$

$$x^2 + 6x = (x+3)^2 - 9 \leftarrow (\text{正しい})$$

【平方完成の変形2】

先に述べた公式(1)は、 A が負の数でも成り立つが、符号で間違える生徒が多いので、分けて書いてみると。

$$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

こここのところ、 $+a^2$ となることが最後まで影響する

右辺から書くと

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x-a)^2$$

a^2 を移項すると

$$x^2 - 2ax = (x-a)^2 - a^2$$

$2a = A$ とおくと

$$x^2 - Ax = (x - \frac{A}{2})^2 - (\frac{A}{2})^2 \dots (2)$$

このように、 $x^2 - Ax$ を平方完成した場合も、最後が「引き算になる」ことに注意

【例題2】 次の式を平方完成してください。

【問題1】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1) $x^2 + 2x$



解説

やり直す

$$(x+1)^2 - 1$$

$$(x-1)^2 + 1$$

$$(x+2)^2 - 4$$

$$(x-2)^2 + 4$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1^2 = (x+1)^2 - 1 \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2 + 2x = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 - 1^2 = (x+1)^2 - 1 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

(2) $x^2 + 4x$



解説

やり直す

$$(x+1)^2 - 1$$

$$(x+2)^2 - 4$$

$$(x+4)^2 - 16$$

$$(x+8)^2 - 16$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2 + 4x = (x+2)^2 - 2^2 = (x+2)^2 - 4 \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2 + 4x = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 = (x+2)^2 - 4 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

(3) $x^2 + 8x$



解説

やり直す

$$(x+4)^2 - 2$$

$$(x+4)^2 - 4$$

$$(x+4)^2 - 8$$

$$(x+4)^2 - 16$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2 + 8x = (x+4)^2 - 4^2 = (x+4)^2 - 16 \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2 + 8x = x^2 + 2 \cdot 4 \cdot x + 4^2 - 4^2 = (x+4)^2 - 16 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

【問題2】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1) $x^2 - 4x$



解説

やり直す

$$(x-2)^2 + 4$$

$$(x-2)^2 - 4$$

$$(x-4)^2 + 16$$

$$(x-4)^2 - 16$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2 - 4x = (x-2)^2 - 2^2 = (x-2)^2 - 4 \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2 - 4x = x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 = (x-2)^2 - 4 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

(2) $x^2 - 10x$



解説

やり直す

$$(x-5)^2 + 25$$

$$(x-5)^2 - 25$$

$$(x-10)^2 + 100$$

$$(x-10)^2 - 100$$

$$x^2-8x$$

(解答)

(A方式)

$$(x-4)^2-4^2=(x-4)^2-16$$

(B方式)

とにかく2乗の展開式を作ると $x^2-8x+16$ だから

$$x^2-8x+16-16$$

$$=(x-4)^2-16$$

**** 危険な落とし穴 ****
カッコ内のマイナスをプラスで打ち消そうとしてはダメ

$$(x-4)^2+16 \text{ は } \times$$

$$(x-4)^2-16 \text{ が } \bigcirc$$

$(x-4)^2=x^2-8x+16$
だから「引かないと合わない」

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2-10x=(x-5)^2-5^2=(x-5)^2-25 \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2-10x=x^2-2 \cdot 5 \cdot x+5^2-5^2=(x-5)^2-25 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

(3) x^2-6x



解説

やり直す

$$(x-6)^2+12$$

$$(x-6)^2-36$$

$$(x-3)^2-6$$

$$(x-3)^2-9$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2-6x=(x-3)^2-3^2=(x-3)^2-9 \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2-6x=x^2-2 \cdot 3 \cdot x+3^2-3^2=(x-3)^2-9 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

【例題3】 次の式を平方完成してください。

$$x^2+3x$$

(解答)

1次の係数が奇数: 3 のときは, その半分は分数になる.

$$x^2+3x=(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$$

(B方式なら)

$$x^2+3x=x^2+2 \cdot \frac{3}{2}x+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2$$

$$=(x+\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}$$

【問題3】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

こちら辺から暗算では無理になりますので, 計算用紙を使って計算してから答えてください。
まぐれで当たっても実力は付きません。

(1) x^2+5x



解説

やり直す

$$(x+5)^2-\frac{5}{2}$$

$$(x+5)^2-5$$

$$(x+\frac{5}{2})^2-5$$

$$(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2+5x=(x+\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2=(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4} \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2+5x=x^2+2 \cdot \frac{5}{2}x+(\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2$$

$$=(x+\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4} \dots (\text{答})$$

→閉じる←

(2) x^2+9x



解説

やり直す

$$(x+9)^2-18$$

$$(x+9)^2-81$$

$$(x+\frac{9}{2})^2-5$$

$$(x+\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4}$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2+9x=(x+\frac{9}{2})^2-(\frac{9}{2})^2=(x+\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4} \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2+9x=x^2+2 \cdot \frac{9}{2}x+(\frac{9}{2})^2-(\frac{9}{2})^2$$

$$=(x+\frac{9}{2})^2-\frac{81}{4} \dots (\text{答})$$

→閉じる←

(3) x^2+x



解説

やり直す

$$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}$$

$$(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}$$

$$(x+1)^2-1$$

$$(x+1)^2-\frac{1}{4}$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2+x=(x+\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$x^2+x=x^2+2 \cdot \frac{1}{2}x+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^2$$

$$=(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4} \dots (\text{答})$$

→閉じる←

【例題4】 次の式を平方完成してください。

$$x^2-5x$$

(解答)

1次の係数が奇数: 5 のときは, その半分は分数になる.

$$x^2-5x=(x-\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}$$

(2) x^2-7x



解説

やり直す

$$(x-\frac{7}{2})^2-\frac{49}{2}$$

$$(x-\frac{7}{2})^2-\frac{49}{4}$$

$$(x-7)^2+\frac{7}{2}$$

$$(x-7)^2-\frac{49}{4}$$

(B方式なら)

$$\begin{aligned}x^2 - 5x &= x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 \\&= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\end{aligned}$$

【問題4】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1) $x^2 - 3x$



解説

やり直す

$$\left(x - 3\right)^2 - \frac{3}{2}$$

$$\left(x - 3\right)^2 - \frac{3}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$\begin{aligned}x^2 - 3x &= x^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\&= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \dots (\text{答})\end{aligned}$$

→閉じる←

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2 - 7x = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$\begin{aligned}x^2 - 7x &= x^2 - 2 \cdot \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 \\&= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} \dots (\text{答})\end{aligned}$$

→閉じる←

(3) $x^2 - \frac{1}{2}x$



解説

やり直す

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 1$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

(A) → (1次の係数の半分) → (さらにその2乗) と考える場合

$$x^2 - \frac{1}{2}x = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \dots (\text{答})$$

(B) → (とにかく2乗の展開式を作ることから始める場合)

$$\begin{aligned}x^2 - \frac{1}{2}x &= x^2 - 2 \cdot \frac{1}{4}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\&= \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} \dots (\text{答})\end{aligned}$$

→閉じる←

【平方完成の変形3】

x^2 の係数が1以外するとき、平方完成の変形を行うには、初めにその係数をくり出して x^2 の係数が1になるようにします。

【例】 $2x^2 + 4x = 2(x^2 + 2x)$

この形にしてから、()の中を今までやってきた方法で平方完成します。

$$= 2\{(x+1)^2 - 1\}$$

最終的に答えの形にするときは「外側の{ }をはずして」答えます。

$$= 2(x+1)^2 - 2$$

※内側の()をはずしてしまうと、元に戻ってしまうので注意。

【変形の注意点】

1) カッコを「はずす」ときは、係数を「掛ける」ので、その逆にかっこで「くくる」ときは、係数で「割ります」。

かっこをはずす → $3(x^2 + 2x) = 3x^2 + 6x$

かっこでくくる → $3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$

2) マイナスの係数でくくるときは、1次の係数の符号も変わります。

間違い計算 → $-3x^2 + 6x = -3(x^2 + 2x)$

※この計算間違いはビックリするほど多いので気を付けましょう！

正しい計算 → $-3x^2 + 6x = -3(x^2 - 2x)$

3) 整数の係数でくくるとき、係数はその整数で「割ったもの」になります。

これに対して、分数の係数でくくるとき、係数はその分数で「割ったもの」になります。分数で割るには逆数を掛けます。

整数でくくる → $3x^2 + 6x = 3(x^2 + 2x)$

分数でくくる → $\frac{1}{3}x^2 + 2x = \frac{1}{3}(x^2 + 6x)$

※「あやしい」「よくわからない」と思ったら、かっこをはずしたと

【問題5】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

(1) $2x^2 + 4x$



解説

やり直す

$$2(x+2)^2 - 2$$

$$2(x+2)^2 - 4$$

$$2(x+1)^2 - 1$$

$$2(x+1)^2 - 2$$

$$2x^2 + 4x = 2(x^2 + 2x)$$

$$= 2\{(x+1)^2 - 1\}$$

$$= 2(x+1)^2 - 2 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

(2) $3x^2 - 12x$



解説

やり直す

$$3(x-2)^2 - 4$$

$$3(x-2)^2 - 12$$

$$3(x-6)^2 - 9$$

$$3(x-6)^2 - 36$$

$$3x^2 - 12x = 3(x^2 - 4x)$$

$$= 3\{(x-2)^2 - 4\}$$

$$= 3(x-2)^2 - 12 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

(3) $-x^2 + 6x$



解説

やり直す

$$-(x-3)^2 - 9$$

$$-(x-3)^2 + 9$$

$$-(x+3)^2 - 9$$

$$-(x+3)^2 + 9$$

$$-x^2 + 6x = -(x^2 - 6x)$$

$$= -\{(x-3)^2 - 9\}$$

$$= -(x-3)^2 + 9 \dots (\text{答})$$

→閉じる←

きに元に戻るかどうか目で確かめるようにします。

※マイナスの符号と分数の係数が混ざると、間違いが非常に多くなる傾向がありますので、幾つか例を示しておきます。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}x^2 + x &= \frac{1}{2}(x^2 + 2x) \\ \frac{1}{2}x^2 - 4x &= \frac{1}{2}(x^2 - 8x) \\ -\frac{1}{2}x^2 + 6x &= -\frac{1}{2}(x^2 - 12x) \\ -\frac{1}{2}x^2 - 5x &= -\frac{1}{2}(x^2 + 10x)\end{aligned}$$

4) 定数項があるとき、定数項は平方完成の計算に参加せずに外に置いたままにします。

定数項があるときに、かっこの内側に入れてしまうと、最後に再び外側に出さなければなりません。
出したたり入れたりとすると、計算間違いの元ですから、外に置いたままにして、平方完成から出てくる定数項と差し引きして答えます。

$$\begin{aligned}\text{まずい計算} \rightarrow 2x^2 + 4x + 1 &= 2(x^2 + 2x + \frac{1}{2}) \\ &= 2\{(x+1)^2 - 1 + \frac{1}{2}\} \\ &= 2\{(x+1)^2 - \frac{1}{2}\} \\ &= 2(x+1)^2 - 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{よい計算} \rightarrow 2x^2 + 4x + 1 &= 2(x^2 + 2x) + 1 \\ &= 2\{(x+1)^2 - 1\} + 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 2 + 1 \\ &= 2(x+1)^2 - 1\end{aligned}$$

(4) $-2x^2 - 8x$

解説 やり直す

$$\begin{aligned}-2(x+2)^2 + 8 & \quad -2(x+2)^2 - 8 \\ -2(x-2)^2 + 8 & \quad -2(x-2)^2 - 8 \\ -2x^2 - 8x &= -2(x^2 + 4x) \\ &= -2\{(x+2)^2 - 4\} \\ &= -2(x+2)^2 + 8 \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

→閉じる←

【問題6】 次の各式を平方完成してください。(下の選択肢から正しいものを選んでクリック)

暗算ではできません。計算用紙を使って計算してから答えてください。
まぐれで正解になっても実力は付きません。

(1) $\frac{1}{2}x^2 + 2x$

解説 やり直す

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(x+1)^2 - 1 & \quad \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2 \\ \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 & \quad \frac{1}{2}(x+2)^2 - 4 \\ \frac{1}{2}x^2 + 2x &= \frac{1}{2}(x^2 + 4x) \\ &= \frac{1}{2}\{(x+2)^2 - 4\} \\ &= \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2 \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

→閉じる←

(2) $\frac{1}{3}x^2 - 2x$

解説 やり直す

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(x-1)^2 - 1 & \quad \frac{1}{3}(x-1)^2 - 3 \\ \frac{1}{3}(x-3)^2 - 3 & \quad \frac{1}{3}(x-3)^2 - 9 \\ \frac{1}{3}x^2 - 2x &= \frac{1}{3}(x^2 - 6x)\end{aligned}$$

(3) $-\frac{1}{2}x^2 + x$

解説 やり直す

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} & \quad -\frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1 & \quad -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1 \\ -\frac{1}{2}x^2 + x &= -\frac{1}{2}(x^2 - 2x) \\ &= -\frac{1}{2}\{(x-1)^2 - 1\} \\ &= -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2} \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

→閉じる←

(4) $-\frac{2}{3}x^2 - 4x$

解説 やり直す

$$\begin{aligned}-\frac{2}{3}(x-3)^2 + 6 & \quad -\frac{2}{3}(x-3)^2 - 6 \\ -\frac{2}{3}(x+3)^2 + 6 & \quad -\frac{2}{3}(x+3)^2 - 6 \\ -\frac{2}{3}x^2 - 4x &= -\frac{2}{3}(x^2 + 6x) \\ &= -\frac{2}{3}\{(x+3)^2 - 9\} \\ &= -\frac{2}{3}(x+3)^2 + 6 \cdots (\text{答})\end{aligned}$$

→閉じる←

$$= \frac{1}{3}\{(x-3)^2 - 9\}$$

$$= \frac{1}{3}(x-3)^2 - 3 \cdots (\text{答})$$

→閉じる←

【問題7】 次の各式を平方完成してください。（下の選択肢から正しいものを選んでクリック）

(1) $2x^2 + 8x + 5$

☒ 解説 やり直す

$$2(x+2)^2 - 4 \quad 2(x+2)^2 - 3$$

$$2(x+2)^2 + 1 \quad 2(x+2)^2 + 3$$

$$2x^2 + 8x + 5 = 2(x^2 + 4x) + 5$$

$$= 2\{(x+2)^2 - 4\} + 5$$

$$= 2(x+2)^2 - 8 + 5 = 2(x+2)^2 - 3 \cdots (\text{答})$$

→閉じる←

(2) $2x^2 - 4x + 3$

☒ 解説 やり直す

$$2(x-1)^2 + 1 \quad 2(x-1)^2 + 2$$

$$2(x-1)^2 - 1 \quad 2(x-1)^2 - 2$$

$$2x^2 - 4x + 3 = 2(x^2 - 2x) + 3$$

$$= 2\{(x-1)^2 - 1\} + 3$$

$$= 2(x-1)^2 - 2 + 3 = 2(x-1)^2 + 1 \cdots (\text{答})$$

→閉じる←

(3) $x^2 - 3x + 1$

☒ 解説 やり直す

$$(x-3)^2 - 8 \quad (x-3)^2 + 10$$

$$(x-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{2} \quad (x-\frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4}$$

$$x^2 - 3x + 1 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + 1$$

$$= (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{5}{4} \cdots (\text{答})$$

→閉じる←

(4) $-x^2 + x - 2$

☒ 解説 やり直す

$$-(x+1)^2 - 3 \quad -(x-1)^2 - 1$$

$$-(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{7}{4} \quad -(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$$

$$-x^2 + x - 2 = -(x^2 - x) - 2$$

$$= -\left\{(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}\right\} - 2$$

$$= -(x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} - 2 = -(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{7}{4} \cdots (\text{答})$$

→閉じる←