

■重複順列

「同じものを繰り返し取ってよいという約束のもとで」できる順列を重複順列といいます。「同じものを繰り返し取ってよいという約束」は、通常「重複を許して」という言葉で表現されます。

異なる n 個のものから重複を許して r 個取ってできる順列の総数は、次のように求めることができます。

右図のように、 n 個の候補者を r 個の箱に並べるとき
 初めの箱の入れ方は n 通り
 (ここが重要) 一度使ったものを何度でも使えることにすれば、2番目の箱の入れ方は n 通り
 3番目の以降の箱の入れ方も、すべて n 通り

以上により次の公式が成り立ちます。なお、重複順列の総数は ${}_n P_r$ と書かれることがありますが、この記号を使わなければならないということではありません。(高校の教科書では使われていません)

【重複順列の総数】

異なる n 個のものから重複を許して r 個取ってできる順列の総数は

$$\underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n}_{r \text{ 個}} = n^r$$

【例1】

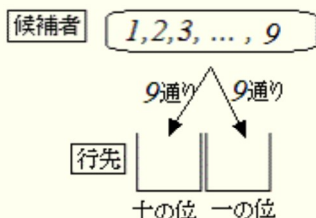
1 から9までの数字を使ってできる2桁の正の整数は何通りありますか。ただし、同じ数字を使ってもよいものとします。

(参考)

1 から99 までに99 個の整数があります。100 は3桁の整数です。このうちで、
 01,02,...,09 すなわち1,2,...,9の9個は1桁の整数
 10,20,30,...,90 の9個は0を使っているから問題の条件に合いません。
 以上により99個のうち18個が条件に合いませんので81個が条件に合います。

(解答)

十の位の決め方は1~9の9通り。
 その各々について一の位の決め方も9通りだから、
 $9 \times 9 = 81$ 通り…(答)



【例2】

異なる3個の文字 a, b, c から重複を許して4個取って並べる順列の総数は何通りありますか。

(解答)

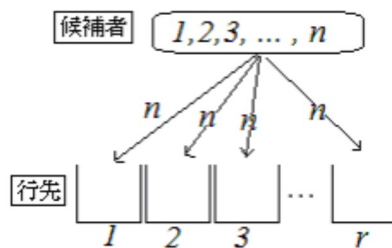
先頭の文字の決め方は3通り
 その各々について2番目の文字は先頭の文字と無関係に決められるから3通りの決め方がある。
 3番目、4番目の文字も同様に3通りの決め方がある。
 以上により、 $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 通り…(答)



【例3】

二進数は、2種類の記号 $0, 1$ を並べて表現されます。
 2種類の記号 $0, 1$ を合計3個使って作れる記号は何通りありますか。ただし、全く使われない数字があってもよいものとします。

図1



「重複」の読み方

検定済み教科書3冊のうち、索引の「さ行」に重複順列と書かれているもの(=「じゅうふく」と読むもの)が1冊、索引の「た行」に重複順列と書かれているもの(=「ちようふく」と読むもの)が1冊、両方に書かれているもの(=「じゅうふく」「ちようふく」のどちらでもよい)が1冊でした。筆者はどちらでもよいと教えながら、口では「じゅうふく」と言います。

【重複順列において前提となっている事柄】

(1) 同じものを繰り返して使ってよい代わりに、全く使われないものもあります。

例えば、左の例1において33は条件を満たす1つの数ですが、この数には1,2,4,5,6,7,8,9は一度も使われていません。この事情は、一般の順列のときにも当てはまりません。

(2) r が n よりも大きいこともあります。

一般の順列では、 $0 \leq r \leq n$ でなければなりません。重複順列では同じものを何度でも使えますので、例えば異なる3個のものから、5個取ってくるすることができます。

【重複順列の落とし穴】

重複順列の総数は n^r という簡単な公式になるため、機械的に暗記するだけでできそうに見えますが、「どちらが n でどちらが r なのか、正確に見分ける勘を養わないと解けません。



例 5匹の猿に異なる6個の菓子を配る方法は何通りありますか。ただし、1個ももらえない猿がいてもよいとします。



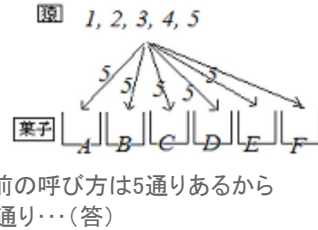
5^6 それとも 6^5 、どちらが正しいか?
 (筆者としては、ここで「あれ～? ん～?」と立ち往生する方がより深い理解のためになると考えています。下記の例4参照)

【例4】

5匹の猿に異なる6個の菓子を配る方法は何通りありますか。ただし、1個ももらえない猿がいてもよいとします。

(解答)

各々の菓子を与えるときに猿の名前を呼ぶことにします。
 名前を呼ばれた猿はその菓子をもらい、一度も名前を呼ばれない猿がいてもよいことにします。
 各々の菓子を配るときに、前の菓子の配り方と無関係に猿の名前の呼び方は5通りあるから



$$5^6 = 15625 \text{ 通り} \dots (\text{答})$$

※ もし、「異なる6個の菓子から重複を許して5つ取る」と考えると、配られない菓子があることになります。
 (異なる5匹の猿の名刺を、重複を許して6個の菓子上に貼る方法と同じになります…猿の面目丸つぶれです。)

【例5】

「3桁の二進数」といえば、001のように先頭に0が来るものを「何桁の二進数」と数えるかを決めておかなければなりません。ここでは「合計3個」の記号を使うとしているので、001なども3個使ったものと数えます。

(解答)

先頭の数の決め方は2通り

その各々について、2つ目の数の決め方も2通り

その各々について、3つ目の数の決め方も2通り

$2^3=8$ 通り…(答)

000 100

001 101

010 110

011 111

「りんご」「かき」「みかん」各1個、合計3個の果物を、A、Bの2つの箱に分ける方法は何通りありますか。ただし、「分けた」といえるためには、1つの箱に全部入れてはいけません。

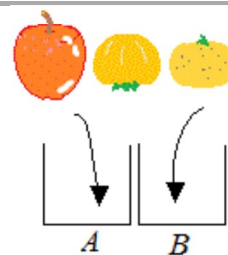
(解答)

りんごの行先はA、Bの2通り

かき、みかんについても同様に2通り

これら $2 \times 2 \times 2 = 8$ 通りの中には、全部Aに入る場合が1通り、全部Bに入る場合が1通りあるから

$2^3 - 2 = 6$ 通り…(答)



※ もし、「異なる3個の果物から重複を

許して2つ取る」と考えると、箱に入れない果物があることになります。