

== 円順列, じゅず順列 ==

---円順列---

例1

4人の生徒が円形のテーブルのまわりに座るとき、座り方は何通りあるか。

<考え方>

右図の4種類の座り方は、左上の座り方を回転させたものです。

このように「回転させれば一致する並び方は同じならび方とみなす」のが円順列です。

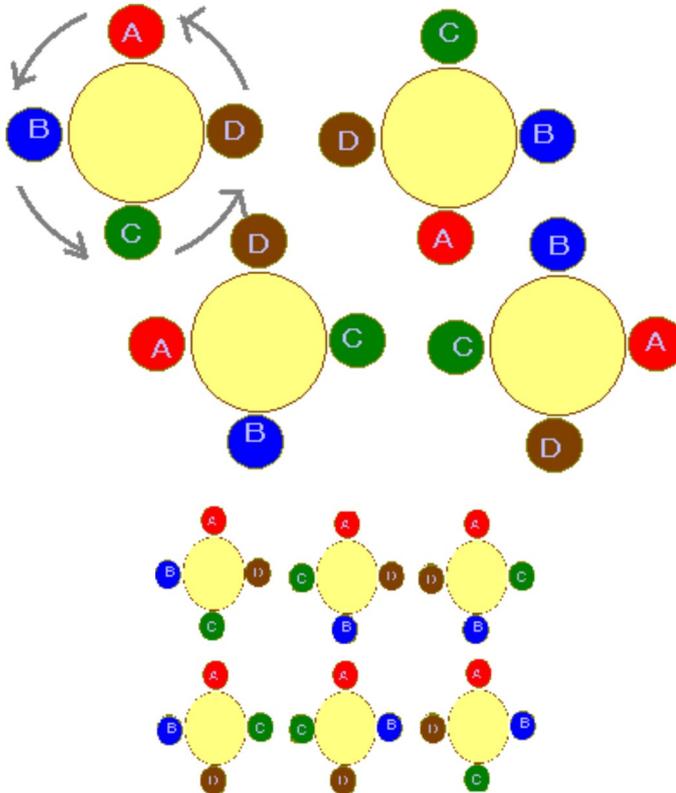
円順列とは、座席を区別せず、ものの相対的な位置関係だけを区別するものだともいえます。---右図のどの場合にもAさんの右手にはBさんがいます。

座席の区別があれば4!通りの座り方がありますが、まわせば重なるものが4通りずつ含まれているので、円順列としては $4! \div 4 = 3!$ 通りあります。

6通り... (答)

答えとなる並び方は、右図 ---1人(Aさん)の座席を固定して表したもの。

これらは全部同じもの===>円順列としては1通り



《要点》

n個のもの全部使ってできる円順列の総数は

$$(n-1)!$$

※この公式が使えるのは「n個のものを全部使う場合」かつ「1回ずつ使う場合」かつ「同じものがない場合」です。これらの条件を1つでも満たしていない場合には、上記のような簡単な式にはなりません。

---じゅず順列---

例2

ダイヤ、サファイヤ、ルビー、水晶の4個の宝石を使って首飾りを作るとき、何通りの首飾りができるか。

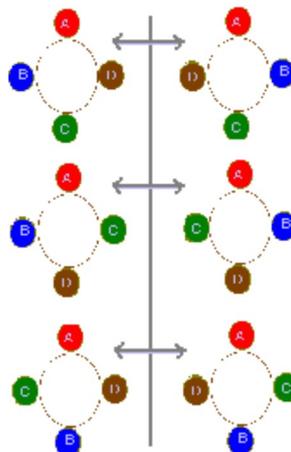
<考え方>

首飾りのように持ち上げることのできるものでは、「まわして重なる」だけでなく「裏返せば重なる」ことがあります。

右の6個の輪は前の問題の円順列ですが、この中には裏返せば重なるものが2つつつあります。

そこで、首飾りの種類は、円順列のさらに半分になります。(このような数え方をするものを、「じゅず順列」といいます。)

$3! \div 2 = 3$ 通り... (答)



《要点》

n個のもの全部使ってできるじゅず順列の総数は

$$(n-1)! \div 2$$

《問題》正しいものを選んでください。

《1》

5人の人が円形のテーブルのまわりに座る方法は何通りあるか。

- 2 4 6 10 12 24 30 45 48

《2》

6人の生徒が手をつないで輪になる方法は何通りあるか。

- 2 4 6 10 12 24 30 45 48
60 72 120 360 720 1440 2880

○ 解説

60 72 120 360 720 1440 2880

○ 解説

(5-1)!です。
これを5!-1!などと変形しないように、階乗のカッコは、はずせませんので、カッコ内を先に計算します。
(5-1)! = 4! = 24 …(答)

6人で作る円順列です
(6-1)! = 5! = 120 …(答)

《3》

父母と子供3人の合計5人が円卓のまわりに座るとき、父母が隣り合う座り方は何通りあるか。

2 4 6 10 12 24 30 45 48
60 72 120 360 720 1440 2880

○ 解説

まず父母をセットにして4人で円順列を作る方法が3!通り
その各々について父母の座席を入れ替える方法が2!通り
3! × 2! = 12 …(答)

《4》

父母と子供4人の合計6人が円卓のまわりに座るとき、一番年下の子供が父母の間に座る方法は何通りあるか。

2 4 6 10 12 24 30 45 48
60 72 120 360 720 1440 2880

○ 解説

父母と一番年下の子供をセットにし、合計4人で円順列を作る方法は3!通り
その各々について、父母の座席を入れ替える方法が2!通り

※ この問題について、遠回りをしても「父母の間」といえるかどうかは、常識で判断します—遠回りをした場合、間とはいいません。
3! × 2! = 12 …(答)

《5》

先生2人、生徒6人の合計8人が手をつないで輪になるとき、先生は互いに向かい側に来よう並ぶ方法は、何通りあるか。

2 4 6 10 12 24 30 45 48
60 72 120 360 720 1440 2880

○ 解説

先生の並び方は、回ることを除けば1通り
その各々について、(誰先生の右とか左とか場所に区別ができてしまうので)生徒の並び方は6!通り
(別解)
生徒が先に並ぶ方法は5!通り
その各々について、先生1人の入れる場所はすきまの6通り。1人の先生の場所が決まるともう1人の先生の入り方は決まってしまう
6! = 720 …(答)

《6》

男子2人、女子4人の合計6人が手をつないで輪になるとき、男子が隣り合わない並び方は何通りあるか。

2 4 6 10 12 24 30 45 48
60 72 120 360 720 1440 2880

○ 解説

まず、男子が隣り合う並び方を数える：
男子をセットにして1人と数えて、5人の円順列を作る方法は4!通り
その各々について、男子の並び方の入れ替え方が2!通り
できた結果を全体の円順列(6-1)!から引きます。
5! - 4! × 2! = 120 - 48 = 72 …(答)

(別解)
女子が先に円順列を作る方法は3!通り
その各々について、女子のすきま4か所から2か所選んで男子が入る方法は、4・3通り
女子が場所を決めたら、各々の場所には「どの女子の右か左か」という個性・区別ができるから、その後から男子の場所を決めるときには、円順列ではなく単なる順列で考える
3! × 4 × 3 = 72 …(答)

《7》

A, B, C, D, E, F, Gの7人が卓のまわりにすわるとき、D, FがともにAと隣り合うような座り方は何通りあるか。
(京都府大)

2 4 6 10 12 24 30 45 48
60 72 120 360 720 1440 2880

○ 解説

D, Fの間にAが来ることと同じだから、DFA組+他の4人=5個のものの円順列の作り方を考えると4!通り
その各々についてD, Fの入れ替えで2!通り
4! × 2! = 48 …(答)

《8》

男女5人ずつ合計10人が手をつないで輪になるとき、男女が交互に並ぶ方法は何通りあるか。

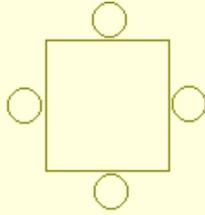
2 4 6 10 12 24 30 45 48
60 72 120 360 720 1440 2880

○ 解説

男子だけで先に円順列を作る方法は4!通り
その各々について(男子のすきま5か所には区別がついてしまうので)女子の入り方は5!通り
4! × 5! = 24 × 120 = 2880 …(答)

<<9>>

4人の人が次の図のように正方形のテーブルのまわりに座る方法は何通りあるか。



2	4	6	10	12	24	30	45	48
60	72	120	360	720	1440	2880		

解説

円順列とまったく同じです。
(4-1)! = 3! = 6 ... (答)

<<10>>

赤1枚、青2枚、黄3枚の合計6枚のカードを机の上で円形に並べる方法は何通りあるか。ただし、同じ色のカードには区別はないものとする。

2	4	6	10	12	24	30	45	48
60	72	120	360	720	1440	2880		

解説

同じものがあるときの順列

$$\frac{6!}{2!3!} = 60$$

これらのうちには、まわして重なるものが6通りずつ含まれているから $\div 6$
10 ... (答)

(別解)

赤を1枚固定する。
残り5個のカードで同じものがあるときの順列を考えると

$$\frac{5!}{2!1!} = 10$$

<<11>>

相異なる6個の宝石を全部使って首飾りを作る方法は何通りあるか。

2	4	6	10	12	24	30	45	48
60	72	120	360	720	1440	2880		

解説

じゅず順列: 円順列 $\div 2$
(6-1)! $\div 2 = 5! \div 2 = 60$... (答)

<<12>>

相異なる6個の宝石のうち4個を使って首飾りを作る方法は何通りあるか。

2	4	6	10	12	24	30	45	48
60	72	120	360	720	1440	2880		

解説

6個から4個を選ぶ方法は ${}_6C_4$ 通り
その各々について、並べ方は4個のもののじゅず順列
 ${}_6C_4 \times (4-1)! \div 2 = 15 \times 3 = 45$... (答)

<<13>>

立方体(正六面体)の表面を6種類の色を全部使って塗り分ける方法は何通りあるか。

2	4	6	10	12	24	30	45	48
60	72	120	360	720	1440	2880		

解説

1つは固定する(これを底面とする)
その各々について、上の面の塗り方は5通り
その各々について、側面の塗り方は4個の円順列 $3!$ 通り
 $5 \times 3! = 30$... (答)

<<15>>

実際に使われるさいころは、向かい合う2面に書かれた数の和が7になるように作られています。(1の裏は6、2の裏は5、3の裏は4です。)この約束だけでさいころを作ると、異なる種類のさいころは、何通りできるか。

2	4	6	10	12	24	30	45	48
60	72	120	360	720	1440	2880		

解説

1の裏には6が来るので、2、3、4、5は1と隣り合っています。
そのうち2、3の書き方を決めれば4、5は決まります。
2の向かい側には3は来ないので、1、2、3は1つの頂点のまわりにあります。結局、3つのものの円順列となります。



(3-1)! = 2 ... (答)

(別解)

1を底面に固定すると、1の裏には6が来るから上面は6に決まります。

<<14>>

正四面体の4面を赤、青、黄、緑の4色で塗り分ける方法は何通りあるか。

(龍谷大)

2	4	6	10	12	24	30	45	48
60	72	120	360	720	1440	2880		

解説

まわしてみても重なるものは同じものです。

(面対称となっているもの(=鏡に映ったもの)は別のものです。)

1つの色、例えば赤を底面に固定する。

次に、残り3個の側面の塗り方が円順列

(3-1)! = 2 ... (答)

側面の1つに2を固定すると、その向かい側には5がきます。
3の入り方は2通りあり、4は自動的に決まります。

2…(答)

※上記の約束だけで作ると、結局、鏡対称となる(光学異性体となる)2種類のサイコロが存在することになります。