■期待値≪解説≫

《要点》

【期待値】
(1) 初めに右のような表を作る.
(2) 変数×確率の積を作る.

$x_k p_k$

(3) それらの合計が期待値

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

変数	x_1	x_2	…	x_n	計
確率	p_1	p_2	…	p_n	1

(解説)
期待値とは，小中学校以来使っている用語で言えば，平均値のことである.

○
右の例を一般化して，次の表から平均値(＝期待値)を求めるには次のようにすればよい.

変数	x_1	x_2	…	x_n	計
度数	f_1	f_2	…	f_n	N
確率	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$	…	$\frac{f_n}{N}$	1

※ f は頻度(度数) *frequency* の頭文字

得点合計は $S=x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n$
期待値(＝平均値)は

$$E=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n}{N}$$

$$=x_1\frac{f_1}{N}+x_2\frac{f_2}{N}+\ldots x_n\frac{f_n}{N}$$

この式は確率 $p_k=\frac{f_k}{N}$ を用いて次のように書ける.

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n$$

※ 期待値は *Expectation* の頭文字をとって E で表わされることが多い.

【例】
次の表はある試験を受けた40人の生徒の得点と人数の一覧表であるとする.

得点 X	10	20	30	40	50	計
人数 n	4	8	16	8	4	N=40
確率 P	$\frac{4}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{16}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{4}{40}$	1

○ この40人の得点の平均値は次のようにして求められる.
10点の人が4人いるから，これらの小計は 10+10+10+10=10×4
20点の人が8人いるから，これらの小計は 20+20+…+20=20×8
………
50点の人が4人いるから，これらの小計は 50+50+50+50=50×4
合計は 10×4+20×8+30×16+40×8+50×4

合計を総人数で割れば平均値になるから
平均値は $E=\frac{10\times4+20\times8+30\times16+40\times8+50\times4}{40}$

○ 人数(度数)と確率には次の関係がある.

人数を総人数Nで割ったものは確率になる.(相対度数とも呼ばれる. ただし，同様な確からしさは満たされているものとする.)
たとえば…40人のうち4人が10点のとき，1人抽出された者が10点である確率は $\frac{4}{40}$

○ 上の計算は人数 n を使って行ったが，この計算は確率 p を使えば次のように書ける.

$E=10\times\frac{4}{40}+20\times\frac{8}{40}+30\times\frac{16}{40}+40\times\frac{8}{40}+50\times\frac{4}{40}$

⇒ まとめ: 得点$_1$ ×確率$_1$ ＋得点$_2$ ×確率$_2$ ＋得点$_3$ ×確率$_3$ ＋… が平均値になる.

例題1
あるくじの賞金と本数は右の表のようになっている. このくじを1本引くときの賞金の期待値を求めよ.

賞金(円)	10	20	30	40	計
本数	4	3	2	1	10

(答案)
○ 単に平均値と考えるときは，次の計算になる.
合計は 10×4+20×3+30×2+40×1=200(円)
平均値は $\frac{200}{10}$=20(円)

○ 期待値の計算では，まず次の表を作る.

賞金(円)	10	20	30	40	計
確率	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

次に，変数×確率を足していく.
期待値 $E=10\times\frac{4}{10}+20\times\frac{3}{10}+30\times\frac{2}{10}+40\times\frac{1}{10}$
=4+6+6+4=20(円)

例題2
さいころを投げて出た目の10倍の金額をもらえることにしたとき，このさいころを1回投げたときにもらえる金額の期待値を求めよ.

(答案)
表が書いてない → 表を作る.

出た目	1	2	3	4	5	6	
金額	10	20	30	40	50	60	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

次に，変数×確率を足していく. この問題では，変数は「出た目」ではなくその10倍
期待値 $E=10\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{6}+30\times\frac{1}{6}+40\times\frac{1}{6}+50\times\frac{1}{6}+60\times\frac{1}{6}=35$

例題3
赤玉4個白玉3個の計7個が入っている袋から，3個の玉を同時に取り出すとき，出てくる赤玉の個数の期待値を求めよ.

(答案)
表が書いてない → 表を作る. 個々の確率は「気長に，ていねいに」計算する. …この数字を埋めるのが山場.

赤玉の個数	0	1	2	3	計
確率	$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$	$\frac{{}_4C_1\,{}_3C_2}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$	$\frac{{}_4C_2\,{}_3C_1}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$	$\frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$	1

次に，変数×確率を足していく.
期待値 $E=0\times\frac{1}{35}+1\times\frac{12}{35}+2\times\frac{18}{35}+3\times\frac{4}{35}=\frac{12}{7}$

≪問題1≫
あるくじの賞金と本数が右のように決められているとき，このくじを1本引いたときの賞金の期待値を求めよ.

賞金(円)	100	500	1000	計
本数	70	20	10	100

≪問題2≫
1個のさいころを投げるとき，出た目の数の期待値を求めよ.

$\frac{3}{2}$　　2　　$\frac{5}{2}$　　3　　$\frac{7}{2}$

150（円）　250（円）　270（円）　750（円）

≪問題3≫
赤玉3個白玉2個の計5個が入っている袋から同時に2個の玉を取りだすとき，その中に含まれる赤玉の個数の期待値を求めよ.

$\frac{1}{5}$　$\frac{2}{5}$　$\frac{3}{5}$　$\frac{4}{5}$　$\frac{6}{5}$

≪問題4≫
2つのサイコロを投げて出た目の数をx , y とするとき，$|x-y|$ の期待値を求めよ.

$\frac{17}{18}$　$\frac{35}{18}$　$\frac{15}{36}$　$\frac{17}{36}$　$\frac{35}{36}$

≪問題5≫
100円硬貨1枚と10円硬貨2枚の計3枚を投げて表を向いた硬貨の金額がもらえるとき，もらえる金額の期待値を求めよ.

40（円）　50（円）　60（円）　70（円）　110（円）

≪問題6≫
3人で1回じゃんけんをするとき，勝者の人数の期待値を求めよ.

0.5（人）　1（人）　1.5（人）　2（人）　2.5（人）