

■期待値<<解説>>

《要点》

【期待値】

- (1) 初めに右のような表を作る。
 (2) 変数×確率の積を作る。

変数	x_1	x_2	...	x_n	計
確率	p_1	p_2	...	p_n	1

$$x_k p_k$$

- (3) それらの合計が期待値

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

(解説)

期待値とは、小中学校以来使っている用語で言えば、平均値のことである。

○

右の例を一般化して、次の表から平均値(=期待値)を求めるには次のようにすればよい。

変数	x_1	x_2	...	x_n	計
度数	f_1	f_2	...	f_n	N
確率	$\frac{f_1}{N}$	$\frac{f_2}{N}$...	$\frac{f_n}{N}$	1

※ f は頻度(度数) frequency の頭文字

得点合計は $S = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n$

期待値(=平均値)は

$$E = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}{N}$$

$$= x_1 \frac{f_1}{N} + x_2 \frac{f_2}{N} + \dots + x_n \frac{f_n}{N}$$

この式は確率 $p_k = \frac{f_k}{N}$ を用いて次のように書ける。

$$E = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

※ 期待値は Expectation の頭文字をとって E で表わされることが多い。

【例】

次の表はある試験を受けた40人の生徒の得点と人数の一覧表であるとする。

得点 X	10	20	30	40	50	計
人数 n	4	8	16	8	4	N=40
確率 P	$\frac{4}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{16}{40}$	$\frac{8}{40}$	$\frac{4}{40}$	1

○ この40人の得点の平均値は次のようにして求められる。
 10点の人が4人いるから、これらの小計は $10+10+10+10=10 \times 4$
 20点の人が8人いるから、これらの小計は $20+20+\dots+20=20 \times 8$

50点の人が4人いるから、これらの小計は $50+50+50+50=50 \times 4$
 合計は $10 \times 4 + 20 \times 8 + 30 \times 16 + 40 \times 8 + 50 \times 4$

合計を総人数で割れば平均値になるから

$$\text{平均値は } E = \frac{10 \times 4 + 20 \times 8 + 30 \times 16 + 40 \times 8 + 50 \times 4}{40}$$

○ 人数(度数)と確率には次の関係がある。

人数を総人数Nで割ったものは確率になる。(相対度数とも呼ばれる。ただし、同様な確からしさは満たされているものとする。)

たとえば...40人のうち4人が10点のとき、1人抽出された者が10点である確率は $\frac{4}{40}$

○ 上の計算は人数 n を使って行ったが、この計算は確率 p を使えば次のように書ける。

$$E = 10 \times \frac{4}{40} + 20 \times \frac{8}{40} + 30 \times \frac{16}{40} + 40 \times \frac{8}{40} + 50 \times \frac{4}{40}$$

⇒ まとめ: **得点₁ × 確率₁ + 得点₂ × 確率₂ + 得点₃ × 確率₃ + ...** が平均値になる。

例題1

あるくじの賞金と本数は右の表のようになっている。このくじを1本引くときの賞金の期待値を求めよ。

賞金(円)	10	20	30	40	計
本数	4	3	2	1	10

(答案)

○ 単に平均値と考えるときは、次の計算になる。

$$\text{合計は } 10 \times 4 + 20 \times 3 + 30 \times 2 + 40 \times 1 = 200(\text{円})$$

$$\text{平均値は } \frac{200}{10} = 20(\text{円})$$

○ 期待値の計算では、まず次の表を作る。

賞金(円)	10	20	30	40	計
確率	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

次に、変数×確率を足していく。

$$\text{期待値 } E = 10 \times \frac{4}{10} + 20 \times \frac{3}{10} + 30 \times \frac{2}{10} + 40 \times \frac{1}{10}$$

$$= 4 + 6 + 6 + 4 = 20(\text{円})$$

例題2

さいころを投げて出た目の10倍の金額をもらえることにしたとき、このさいころを1回投げたときにもらえる金額の期待値を求めよ。

(答案)

表が書いてない → 表を作る。

出た目	1	2	3	4	5	6	計
金額	10	20	30	40	50	60	
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

次に、変数×確率を足していく。この問題では、変数は「出た目」ではなくその10倍

$$\text{期待値 } E = 10 \times \frac{1}{6} + 20 \times \frac{1}{6} + 30 \times \frac{1}{6} + 40 \times \frac{1}{6} + 50 \times \frac{1}{6} + 60 \times \frac{1}{6} = 35$$

例題3

赤玉4個白玉3個の計7個が入っている袋から、3個の玉を同時に取り出すとき、出てくる赤玉の個数の期待値を求めよ。

(答案)

表が書いてない → 表を作る。個々の確率は「気長に、ていねいに」計算する。...この数字を埋めるのが山場。

赤玉の個数	0	1	2	3	計
確率	$\frac{{}_3C_3}{{}_7C_3}$	$\frac{4{}_1C_1{}_3C_2}{{}_7C_3}$	$\frac{4{}_2C_2{}_1C_1}{{}_7C_3}$	$\frac{4{}_3C_3}{{}_7C_3}$	1
	$= \frac{1}{35}$	$= \frac{12}{35}$	$= \frac{18}{35}$	$= \frac{4}{35}$	

次に、変数×確率を足していく。

$$\text{期待値 } E = 0 \times \frac{1}{35} + 1 \times \frac{12}{35} + 2 \times \frac{18}{35} + 3 \times \frac{4}{35} = \frac{12}{7}$$

<<問題1>>

あるくじの賞金と本数が右のように決められているとき、このくじを1本引いたときの賞金の期待値を求めよ。

賞金(円)	100	500	1000	計
本数	70	20	10	100

<<問題2>>

1個のさいころを投げるとき、出た目の数の期待値を求めよ。

$$\frac{3}{2} \quad 2 \quad \frac{5}{2} \quad 3 \quad \frac{7}{2}$$

150 (円) 250 (円) 270 (円) 750 (円)

○ HELP

右のように確率分布表にする。

賞金 (円)	100	500	1000	計
確率	$\frac{7}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{10}$	1

次に、(変数) × (確率) の和を
求める

$$E = 100 \times \frac{7}{10} + 500 \times \frac{2}{10} + 1000 \times \frac{1}{10}$$

$$= 70 + 100 + 100 = 270 \dots (\text{答})$$

◀問題3▶

赤玉3個白玉2個の計5個が入っている袋から同時に2個の玉を取りだすとき、その中に含まれる赤玉の個数の期待値を求めよ。

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{6}{5}$

○ HELP

赤玉0個白玉2個が出る確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2} = \frac{1}{10}$$

赤玉1個白玉1個が出る確率は

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_2C_1}{{}_5C_2} = \frac{6}{10}$$

赤玉2個白玉0個が出る確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2} = \frac{3}{10}$$

右の表から、

$$E = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{3}{10}$$

$$= \frac{12}{10} = \frac{6}{5} \dots (\text{答})$$

赤玉 個数	0	1	2	計
確率	$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{3}{10}$	1

◀問題5▶

100円硬貨1枚と10円硬貨2枚の計3枚を投げて表を向いた硬貨の金額がもらえるとき、もらえる金額の期待値を求めよ。

40 (円) 50 (円) 60 (円) 70 (円)
110 (円)

○ HELP

例えば、100円硬貨が裏、10円硬貨のうち1枚が表、1枚が裏
→10円となる確率は

$$\frac{1}{2} \times {}_2C_1 \times \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

となる。

他の場合も計算すると、確率分布表は次のようになる。

金額	0	10	20	100	110	120	計
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	1

$$E = 0 \times \frac{1}{8} + 10 \times \frac{1}{4} + 20 \times \frac{1}{8} + 100 \times \frac{1}{8} + 110 \times \frac{1}{4} + 120 \times \frac{1}{8}$$

$$= 60 \dots (\text{答})$$

右の表により

数	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

$$E = 1 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{1}{6} + 4 \times \frac{1}{6} + 5 \times \frac{1}{6} + 6 \times \frac{1}{6}$$

$$= \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \dots (\text{答})$$

◀問題4▶

2つのサイコロを投げて出た目の数を x, y とするとき、 $|x-y|$ の期待値を求めよ。

$\frac{17}{18}$ $\frac{35}{18}$ $\frac{15}{36}$ $\frac{17}{36}$ $\frac{35}{36}$

○ HELP

$|x-y|$ の値は右のようになるから、
確率分布表は次の表になる。

$ x-y $	0	1	2	3	4	5	計
度数	6	10	8	6	4	2	36
確率	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	1

$ x-y $	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

$$E = 0 \times \frac{6}{36} + 1 \times \frac{10}{36} + 2 \times \frac{8}{36} + 3 \times \frac{6}{36} + 4 \times \frac{4}{36} + 5 \times \frac{2}{36}$$

$$= \frac{70}{36} = \frac{35}{18} \dots (\text{答})$$

◀問題6▶

3人で1回じゃんけんをするとき、勝者の人数の期待値を求めよ。

0.5 (人) 1 (人) 1.5 (人) 2 (人) 2.5 (人)

○ HELP

紙=パー、石=グー、鋏=チョキ、以下パグチと略す

手の出し方の総数は $N=3^3=27$ 通り

(ア) 1人勝ちとなるのは、パググのような出し方で

勝者の手の決め方が 3 通り(敗者の手は自動的に決まる)

勝者の決め方が ${}_3C_1=3$ 通り

$n=9$ 通りだから、確率は

$$\frac{1}{3}$$

(イ) 2人勝ちとなるのは、パパグのような出し方で

勝者の手の決め方が 3 通り(敗者の手は自動的に決まる)

勝者の決め方が ${}_3C_2=3$ 通り

$n=9$ 通りだから、確率は

$$\frac{1}{3}$$

(ウ) アイコ(勝者0人)となるのは、

全員同じ手を出す(パパパなど)のが 3 通り

3種類の手が出るのが $3!=6$ 通り

$n=9$ 通りだから、確率は

$$\frac{1}{3}$$

勝者の人数の期待値は

$$E = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 1 \dots (\text{答})$$