■独立な試行の確率，反復試行の確率≪解説≫

【独立な試行の確率】《要点》
A，B が独立であるとき，A も B も起こる確率は

$$P(A)\cdot P(B)$$

で求められる.

【例1】 さいころを2回投げて1回目に3以下，2回目に4以下の目が出る確率

ここまでに習った考え方で，図1のように1回目，2回目の起こり得るすべての場合を $N=36$ と考えるときは，
式1のように計算して，

$$P=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$ とする.

図1

	1	2	3	4	5	6
1	○	○	○	○		
2	○	○	○	○		
3	○	○	○	○		
4						
5						
6						

しかし，この問題では1回目に出る目は2回目に出る目に影響していないので，
式2のように1回目に3以下となる確率（$\frac{3}{6}$）と2回目に4以下となる確率（$\frac{4}{6}$）の積でも求めることができる.

式1

$$p=\frac{n}{N}=\frac{3\times4}{6\times6}$$

式2

$$p=p(A)p(B)=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}$$

⇒ このように，A，B が独立であるとき，A も B も起こる確率は

$$P(A)\cdot P(B)$$

で求められる.

例題
さいころを2回投げるとき2回とも偶数の目が出る確率

1回目に偶数(2，4，6)が出る確率は $\frac{1}{2}$，2回目に偶数(2，4，6)が出る確率は $\frac{1}{2}$ でこれらは独立だから

$$p=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

独立でない場合
赤玉3個，白玉2個が入っている袋から，玉を1つずつ取り出し，取り出した玉は元に戻さない場合に，赤玉が2回出る確率･･･（非復元抽出という）

取り出した玉を元に戻さない場合は，1回目に起こったことは2回目の出方に影響する：

図2

（ア） 1回目に赤玉が出たとき，袋の中は赤玉2個，白玉2個の計4個になるから，
2回目に赤が出る確率は $\frac{2}{4}$

（イ） 1回目に白玉が出たとき，袋の中は赤玉3個，白玉1個の計4個になるから，
2回目に赤が出る確率は $\frac{3}{4}$

⇒ このように取り出した玉を元に戻さないときは，1回目に A が起こることと2回目に B が起こることは独立ではない.

⇒ 取り出した玉を元に戻すときは，「独立な試行の確率」が適用できるが，取り出した玉を元に戻さないときは「独立な試行の確率」が適用できない.

※ この問題を今までに習った方法で解くには，
1回目の玉の出方は5通り，そのそれぞれについて2回目の玉の出方は4通り → $N=20$ 通り
1回目に赤が出るのは3通り，その各々について2回目に赤が出るのは2通り → $n=6$ 通り

$$p=\frac{6}{20}=\frac{3}{10}$$

とする.

※ この問題で，1回目に取り出した玉を元に戻すとき（復元抽出という.）は，1回目の玉と2回目の玉はお互いに影響されず，赤赤と出る確率は

$$p=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$$

で求められる.

【反復試行の確率】《要点》
1回の試行で事象 A が起こる確率が p のとき，この試行を n 回繰り返してA が r 回起こる確率は

$${}_nC_r\, p^r\, q^{n-r}$$

ただし，$q=1-p$

（解説）

○ 5回のうち A が3回起こる確率で調べると，

事象 A が起こる確率が p のとき，この試行を 5 回繰り返して A が 3 回起こる確率は，次の各場合を足せばよい．

(1) $pppqq=p^3q^2$
(2) $ppqpq=p^3q^2$
(3) $ppqqp=p^3q^2$
(4) $pqppq=p^3q^2$
(5) $pqpqp=p^3q^2$
(6) $pqqpp=p^3q^2$
(7) $qpppq=p^3q^2$
(8) $qppqp=p^3q^2$
(9) $qpqpp=p^3q^2$
(10) $qqppp=p^3q^2$

⇒上の各式を足したとき，p^3q^2 が10回登場するから，
回数が係数になって，和は $10\,p^3q^2$ になる．

(1) $AAA\overline{A}\overline{A}$ となる場合 ⇒ $pppqq=p^3q^2$ だけでなく
A が起こる順序だけが異なり，A が合計3回となっているものはすべて当てはまる．このようなものは上のように(1)～(10)の10通りあるから，その確率は $10\,p^3q^2$ になる．

○ この係数10は次のようにして求められる：

ア)「同じものがあるときの順列」で考える場合

p が3個，$q(=1-p)$ が2個あるとき，これらを並べ替えてできる順列の総数は $\frac{5!}{3!2!}$ 通りあるから，
p^3q^2 は $\frac{5!}{3!2!}$ 回登場し，その和は，$\frac{5!}{3!2!}p^3q^2$
ここで，$\frac{5!}{3!2!}={}_5C_3$ と書けるから，${}_5C_3p^3q^2$

イ)「組合せ」で考える場合

p が3個，$q(=1-p)$ が2個あるとき，これらを並べ替えてできる順列は並び方の番号札①②③④⑤のうち p の行き先の番号札3個（組合せ）で決まる．
たとえば，p の行き先の番号札が①③④のときは $pqppq$ になる．p の行き先の番号札が①④⑤のときは $pqqpp$ になる，など．
このように考えれば，p 3個，$q(=1-p)$ 2個を並べ替えてできる順列の総数は，${}_5C_3$ 通りあるから，確率の合計は ${}_5C_3p^3q^2$ になる．

○ 一般に

1回の試行で事象 A が起こる確率が p のとき，この試行を n 回繰り返してA が r 回起こる確率は，$p^r\,q^{n-r}$ となる場合が，${}_nC_r$ 通りあることから，それらの合計は

$${}_nC_r\, p^r\, q^{n-r}$$

で求められる．

例題
硬貨を5回投げるとき表がちょうど3回出る確率

1回の試行で表が出る確率は $p=\frac{1}{2}$，表が出ない確率は $q=1-p=\frac{1}{2}$ だから
5回のうち表がちょうど3回出る確率は

$${}_5C_3(\tfrac{1}{2})^3(\tfrac{1}{2})^2=10\cdot\tfrac{1}{32}=\tfrac{5}{16}$$

例題
さいころを6回投げるとき1の目がちょうど2回出る確率

1回の試行で1の目が出る確率は $p=\frac{1}{6}$，1の目
が出ない確率は $q=1-p=\frac{5}{6}$ だから
6回のうち1の目がちょうど2回出る確率は

$${}_6C_2(\tfrac{1}{6})^2(\tfrac{5}{6})^4=15\cdot\frac{625}{46656}=\frac{3125}{15552}$$

≪問題1.1≫
さいころを2回投げるとき，1回目は3以下，2回目は3以上の目が出る確率を求めよ．

0　1　2　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{5}{8}$

≪問題1.2≫
2人の生徒A，Bがある試験に合格する確率が各々 $\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$ のとき，Aが合格，Bが不合格となる確率を求めよ．

0　1　2　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{5}{8}$

$\frac{3}{16}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{17}{24}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{671}{1296}$

○ 解説

3以下となる出方は (1)(2)(3)(*)(*)(*) の3通り
3以上となる出方は (*)(*)(3)(4)(5)(6) の4通り
1回目の出方は2回目の出方に影響しない.

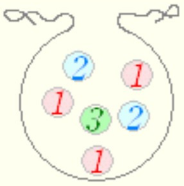
$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}\cdots(答)$$

$\frac{3}{16}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{17}{24}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{671}{1296}$

○ 解説

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}\cdots(答)$$

≪問題1.3≫
1と書かれた玉が3個，2と書かれた玉が2個，3と書かれた玉が1個，計6個が入っている袋から玉を3回取り出して番号を調べる．取り出した玉はその都度元に戻すものとして，1，2，3の順に玉が出る確率を求めよ．



0 1 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{8}$

$\frac{3}{16}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{17}{24}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{671}{1296}$

○ 解説

（玉を復元するので各回の出方は独立）
1回目に1が出る確率は

$$\frac{3}{6}$$

2回目に2が出る確率は

$$\frac{2}{6}$$

3回目に3が出る確率は

$$\frac{1}{6}$$

各回の出方は独立だから,

$$\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}\cdots(答)$$

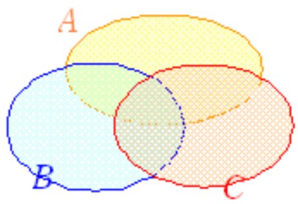
≪問題1.4≫
A，B，Cの3人が的に矢を当てるゲームを行う．
Aが当たる確率は $\frac{1}{2}$，Bが当たる確率は $\frac{2}{3}$，Cが当たる確率は $\frac{3}{4}$ とするとき，この3人が1回ずつゲームをして2人以上当たる確率を求めよ．

0 1 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{8}$

$\frac{3}{16}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{17}{24}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{671}{1296}$

○ 解説

$P(A\cap B)$, $P(B\cap C)$, $P(C\cap A)$
を加えると右図のように
$P(A\cap B\cap C)$ が3重に加えられるから， $P(A\cap B\cap C)\times 2$ を引けばよい．



$$P(A\cap B)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$
$$P(B\cap C)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$
$$P(C\cap A)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$
$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}-\frac{1}{4}\times 2=\frac{17}{24}\cdots(答)$$

≪問題2.1≫
硬貨を5枚投げるとき，4枚以上表が出る確率を求めよ．

0 1 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{8}$

$\frac{3}{16}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{17}{24}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{671}{1296}$

○ 解説

4枚表が出る確率は

$${}_5C_4\times(\frac{1}{2})^4\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

5枚表が出る確率は

$${}_5C_5\times(\frac{1}{2})^5=\frac{1}{32}$$

排反事象の加法定理により

$$\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}\cdots(答)$$

≪問題2.2≫
さいころを4回に投げるとき，少なくとも1回6の目が出る確率を求めよ．

0 1 2 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{5}{8}$

$\frac{3}{16}$ $\frac{5}{16}$ $\frac{17}{24}$ $\frac{1}{36}$ $\frac{671}{1296}$

○ 解説

4回とも6以外となる確率は

$$(\frac{5}{6})^4=\frac{625}{1296}$$

少なくとも1回6の目が出る確率は

$$1-\frac{625}{1296}=\frac{671}{1296}\cdots(答)$$

≪問題2.3≫
硬貨を投げて，表が出れば点 P は x 軸の正の方向に2進

≪問題2.4≫
（ややむずかしい）

み，裏が出れば負の方向に1進むものとする．初め原点にあった点 P が硬貨を5回投げた後に $x=1$ の位置にある確率を求めよ．

0　1　2　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{16}$　$\frac{5}{16}$　$\frac{17}{24}$　$\frac{1}{36}$　$\frac{671}{1296}$

○ 解説

5回のうち r 回表が出るとすると点 P の位置は
$2r-(5-r)=3r-5$ になるから，$3r-5=1$ より $r=2$
5回のうち2回表が出る確率は

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$ …(答)

硬貨を投げて，表が出れば点 P は x 軸の正の方向に1進み，裏が出れば負の方向に1進むものとする．点 P が初め原点にあったとき，硬貨を6回投げた後にどの位置にある確率が最も高いか．

0　1　2　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{16}$　$\frac{5}{16}$　$\frac{17}{24}$　$\frac{1}{36}$　$\frac{671}{1296}$

○ 解説

6回のうち表が r 回出る確率は

$${}_6C_r\times\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{6-r}={}_6C_r\times\frac{1}{64}$$

${}_6C_r$ が最大となる r の値を求めると，
${}_6C_0=1,\ {}_6C_1=6,\ {}_6C_2=15,\ {}_6C_3=20,\ {}_6C_4=15,\ {}_6C_5=6,\ {}_6C_6=1$
だから $r=3$ のとき最大となる
表が3回出たとき，点 P の位置は $x=3-(6-3)=0$ にある．
…(答)

≪問題2.5≫
野球でAチームとBチームが試合を行い，どちらかのチームが先に4勝するまで試合を行うとき，第6試合が行われる確率を求めよ．
ただし，両チームの実力は等しく，引き分けはないものとする．

0　1　2　$\frac{1}{2}$　$\frac{1}{3}$　$\frac{1}{6}$　$\frac{5}{8}$
$\frac{3}{16}$　$\frac{5}{16}$　$\frac{17}{24}$　$\frac{1}{36}$　$\frac{671}{1296}$

○ 解説

第5試合が終わったとき，Aが2勝3敗または3勝2敗のとき第6試合が行われる．
第5試合が終わったとき，Aが2勝3敗となる確率は

$${}_5C_2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{16}$$

第5試合が終わったとき，Aが3勝2敗となる確率は

$${}_5C_3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

求める確率は

$$\frac{5}{16}+\frac{5}{16}=\frac{5}{8}$$ …(答)