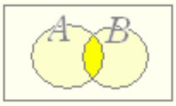
■確率の加法定理，余事象の確率≪解説≫

《要点》
【確率の加法定理】
$A\cap B=\phi$ のとき，（ A , B が排反事象のとき）

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$



【一般の加法定理】

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

※ A と B に共通部分がないとき，これらは排反事象であるという．
排反事象を表わす書き方はいろいろあり，「両立できない」「同時には成り立たない」「共通部分がない」「$A\cap B=\phi$」など同じ意味になる．

※ 「一般の加法定理」は，個数定理（和集合の要素の個数に関するもの）を全体集合の要素数Nで割ったものである．（Nで割ると確率になる．）

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A\cup B)}{N}=\frac{n(A)}{N}+\frac{n(B)}{N}-\frac{n(A\cap B)}{N}$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

例1
「袋の中に赤玉3個，白玉2個が入っているとき，この中から同時に2個取り出して同じ色の玉が出る確率」を求めるには

（解答）
「同じ色の玉が出る」ことを「赤玉が2つ」の場合と「白玉が2つ」に分けて考える．

赤玉が2つ出る確率は $\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$

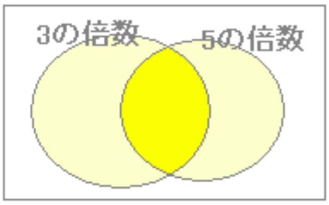
白玉が2つ出る確率は $\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow \frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{2}{5}$ を答とする．

この例では，A「赤玉が2つ出る」，B「白玉が2つ出る」，とするとき，$A\cap B=\phi$ なので（A と B の共通部分がない），どちらか一方が起こる確率は「足し算で求められる」．

例2
「1から100までの整数が書かれている100枚のカードから1枚を抽出したとき，その数が3または5で割り切れる確率」を求めるには

（解答）
100÷3=33…3
100÷5=20
100÷15=6…10



3の倍数となる確率は $\frac{33}{100}$

5の倍数となる確率は $\frac{20}{100}$

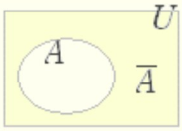
15の倍数となる確率は $\frac{6}{100}$

$\Rightarrow \frac{33}{100}+\frac{20}{100}-\frac{6}{100}=\frac{47}{100}$ を答とする．

この例では，A「3の倍数」，B「5の倍数」，とするとき，A と B の共通部分があるので，単に $P(A)+P(B)$ を計算すると二重に足してしまう部分ができる．そこで，二重の部分 $P(A\cap B)$ を引いて答にする．

《要点》
【余事象の確率】

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$



※ 「少なくとも1つ」 ⇔ 余事象を考える

例3
「3個の硬貨を投げるとき，少なくとも1枚表が出る確率」を求めるには

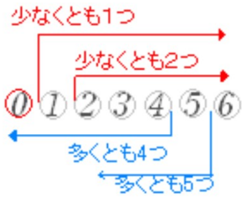
単純に計算すれば
表が1枚出るのは3通り，
表が2枚出るのは3通り，
表が3枚出るのは1通り，
⇒ 計7通りとなるが，

表が0枚出るのは1通りだから
⇒ 8−1＝7通り で求められる．

表	表	表	3枚
表	表	裏	2枚
表	裏	表	2枚
表	裏	裏	1枚
裏	表	表	2枚
裏	表	裏	1枚
裏	裏	表	1枚
裏	裏	裏	0枚

このように A の確率を直接計算する代わりに，$P(\overline{A})=1-P(A)$ で計算した方が簡単なとき，この定理を使う．
上の例では，$\overline{A}$ を「表が1枚以上出る」，A を「表が出ない（＝0枚）」としているが，逆に使ってもよい：$P(A)=1-P(\overline{A})$ ※ 余事象の確率は「少なくとも1つ」という言葉と結びついていることが多い．
「少なくとも1つ」（＝1以上）の余事象は「0個」になる．

※
「少なくとも2つ」（＝2以上）の余事象は「0または1」
「多くとも4つ」（＝4以下）の余事象は「5以上」
「多くとも5つ」（＝5以下）の余事象は「6以上」



※ A 以外を表わす記号 $\overline{A}$ は，集合の記号では「補集合」と呼ばれ，確率では「余事象」と呼ばれる．

［確率の加法定理，一般の加法定理］

≪問題1.1≫
赤玉3個，白玉2個の合計5個の玉が入っている袋から同時に

≪問題1.2≫
100以上200未満の整数が書かれた100枚のカードから1枚を取り出すとき，書かれた数字が3または5で割り切れる確率を求め

2個取り出すとき，同じ色の玉が出る確率を求めよ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

赤赤と出る確率は

$$\frac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\frac{3}{10}$$

白白と出る確率は

$$\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

加法定理により

$$p=\frac{3}{10}+\frac{1}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}\cdots(答)$$

よ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

3で割り切れるのは $\{3n|34\leqq n\leqq 66\}$ の33通り
5で割り切れるのは $\{5n|20\leqq n\leqq 39\}$ の20通り
15で割り切れるのは $\{15n|7\leqq n\leqq 13\}$ の7通り

$$p=\frac{33+20-7}{100}=\frac{46}{100}=\frac{23}{50}\cdots(答)$$

≪問題1.3≫
赤玉2個，白玉2個計4個が入っている袋から玉を取りだして順に並べるとき，同じ色の玉は隣り合わない確率を求めよ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

並べ方の総数は $N=4!=24$ 通りで，どの場合も同様に確からしい．
余事象：隣り合う場合の数を調べる
ア）赤玉が隣り合う並べ方は，赤セット1+白玉2個＝3つの並べ方×赤玉の内部交換　$3!\cdot 2!=12$ 通り
イ）白玉が隣り合う並べ方は，白セット1+赤玉2個＝3つの並べ方×白玉の内部交換　$3!\cdot 2!=12$ 通り
ウ）赤玉も白玉も隣り合う並べ方は，白セット1+赤セット1＝2つの並べ方×各々の内部交換　$2!\cdot 2!\cdot 2!=8$ 通り
一般の加法定理により

$$p=\frac{12+12-8}{24}=\frac{2}{3}$$

余事象を考えると

$$\overline{p}=\frac{1}{3}\cdots(答)$$

≪問題1.4≫
赤玉2個，白玉2個，黄玉2個計6個が入っている袋から玉を取りだして順に並べるとき，同じ色の玉は隣り合わない確率を求めよ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

赤玉2個，白玉2個，黄玉2個計6個の場合
$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$
　$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$ で計算する．
6個の玉の並べ方の総数は $N=6!=720$ 通り
ア）赤玉が隣り合う並べ方は $5!\cdot 2!=240$ 通り
イ）白玉が隣り合う並べ方は $5!\cdot 2!=240$ 通り
ウ）黄玉が隣り合う並べ方は $5!\cdot 2!=240$ 通り
エ）赤玉と白玉が各々隣り合う並べ方は $4!\cdot 2!\cdot 2!=96$ 通り
オ）白玉と黄玉が各々隣り合う並べ方は $4!\cdot 2!\cdot 2!=96$ 通り
カ）黄玉と赤玉が各々隣り合う並べ方は $4!\cdot 2!\cdot 2!=96$ 通り
キ）3色とも各々隣り合う並べ方は $3!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 2!=48$ 通り
ア）～キ）より，どの色も隣り合わない並べ方は
$720-(240+240+240-96-96-96+48)=240$ 通り

$$p=\frac{240}{720}=\frac{1}{3}\cdots(答)$$

［余事象の確率］

≪問題2.1≫
10本のくじの中に当たりくじが2本入っている．この中から同時に3本のくじを引いたとき，少なくとも1本が当たりくじである確率を求めよ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

3本ともはずれとなる確率は

$$p=\frac{{}_8C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$$

≪問題2.2≫
3個のさいころを同時に投げたとき，少なくとも1つ6の目が出る確率を求めよ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

3本とも6以外となる確率は

$$p=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$$

少なくとも1つ6の目が出る確率は

少なくとも1本当たる確率は

$$\overline{p}=1-\frac{7}{15}=\frac{8}{15}\cdots(\text{答})$$

≪問題2.3≫

赤玉6個白玉4個の計10個の玉が入っている袋から同時に3個の玉を取り出すとき，赤玉が少なくとも2個出てくる確率を求めよ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

赤玉が出ない確率は

$$\frac{{}_4C_3}{{}_{10}C_3}=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$$

赤玉1個白玉2個の確率は

$$\frac{{}_6C_1\times{}_4C_2}{{}_{10}C_3}=\frac{36}{120}=\frac{9}{30}$$

余事象の確率を考えると

$$1-(\frac{1}{30}+\frac{9}{30})=\frac{2}{3}\cdots(\text{答})$$

※赤玉が2個または3個となる確率を直接求めてもよい：

$$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_1}{{}_{10}C_3}+\frac{{}_6C_3\times{}_4C_0}{{}_{10}C_3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

≪問題2.5≫

赤玉3個，白玉3個，黄玉2個の計8個の玉が袋に入っている．この中から同時に3個取り出すとき，出た玉の色が2色となる確率を求めよ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

1色となるとき

ア）赤3個となるとき

$$\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$$

イ）白3個となるとき

$$\frac{{}_3C_3}{{}_8C_3}=\frac{1}{56}$$

3色となるとき

$$\frac{{}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_2C_1}{{}_8C_3}=\frac{18}{56}$$

余事象の確率を考えると

$$\overline{p}=1-(\frac{1}{56}+\frac{1}{56}+\frac{18}{56})=\frac{36}{56}=\frac{9}{14}\cdots(\text{答})$$

$$\overline{p}=1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}\cdots(\text{答})$$

≪問題2.4≫

5枚の硬貨を同時に投げるとき，表の出る枚数が4枚以下となる確率を求めよ．

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{9}{14}$

$\frac{8}{15}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{23}{50}$ $\frac{91}{216}$

HELP

表が5枚出る確率は

$$p=\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

余事象の確率を考えると

$$\overline{p}=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}\cdots(\text{答})$$