== 順列，組合せ（章末問題）==

■解説

○ 順列

異なる $n$ 個のものから，異なる $r$ 個のものを取ってできる順列の総数（ ただし，$0\leqq r\leqq n$ ）

$${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$$

○ 重複順列

異なる $n$ 個のものから，重複を許して $r$ 個のものを取ってできる順列の総数（ $r$ は $n$ よりも大きくてもよい．）

$${}_n\Pi_r=n^r$$

※高校の教科書では通常 ${}_n\Pi_r=n^r$ という記号は使われていない．

ギリシャ文字の $\Pi$（パイ）は積を表す．

$${}_n\Pi_r=\underbrace{n\cdot n\cdot\cdot n}_{r}$$

単に重複順列は $n^r$ と覚えたらよい．

○ 同じものがあるときの順列

$n$ 個のもののうち，$p$ 個，$q$ 個，$r$ 個，… がそれぞれ同じものであるとき，これらを全部使っていできる順列の総数

（ ただし，$p+q+r+\cdots=n$ ）

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

（※ 全部使うときはこの公式で簡単に求まるが，一部だけ使うときはその構成に応じて分けて考えなければならず，かなり複雑になる）

○ 組合せ

異なる $n$ 個のものから，異なる $r$ 個のものを取ってできる組合せの総数（ ただし，$0\leqq r\leqq n$ ）

$${}_nC_r=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

○ 重複組合せ

異なる $n$ 個のものから，重複を許して $r$ 個のものを取ってできる組合せの総数（ $r$ は $n$ よりも大きくてもよい．）

$${}_nH_r={}_{n+r-1}C_r$$

※重複組合せの記号には，なぜH を使うのか

次数（掛けてある文字の数）が等しい多項式を「同次多項式」「斉次多項式」という（ *Homogeneous polynomial* ）．重複組合せは，同次多項式の異なる項の数として登場するので，このHを記号にしたもの．

2つの文字で作られる3次式が何通りあるかについて：

$(a+b)^3$ を展開してできる同次式の総数は

$=aaa+aab+aba+baa+abb+bab+bba+bbb$

順序を区別すれば，項の数は「重複順列」 $2^3=8$ 通りになる

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

文字の部分が同じものを同類項として整理すれば，文字の組合わせは $a^3$ , $a^2b$ , $ab^2$ , $b^3$ で ${}_2H_3=4$ 種類になる

※ これらのうち，順列と組合せには，${}_nP_r=r!\,{}_nC_r$ の関係があるが

例 各位の数が異なる2桁の整数の総数

（解答）

10個の数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 から異なる2つを取って並べる順列 ${}_{10}P_2=10\cdot 9=90$ のうち，先頭が0のもの（9個）は1桁になるから，90−9=81個

（別解）

十の位は0以外の9通り，それぞれ1の位は9通りだから，9×9=81通り

例 2桁の整数の総数

（解答）

10個の数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 から重複を許して2つを取って並べる順列 ${}_{10}\Pi_2=10^2=100$ のうち，先頭が0のもの（10個）は1桁になるから，100−10=90個

（別解）

十の位は0以外の9通り，それぞれ1の位は10通りだから90通り

例 *aaaabbbcc* を並べ替えてできる順列の総数

（解答）

$\frac{9!}{4!3!2!}=1440$ 個

※このうち8個を使うときは次のような計算になる．

$aaabbbcc\rightarrow\frac{8!}{3!3!2!}=560$

$aaaabbcc\rightarrow\frac{8!}{4!2!2!}=420$

$aaaabbbc\rightarrow\frac{8!}{4!3!1!}=280$

計 $1260$

例 2桁の整数のうち，$87$ , $51$ のように十の位の数が一の位の数よりも大きなものの総数

（解答）

10個の数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 から異なる2つを選べば（組合せ）並べ方は決まる（大きい方を前にする）から ${}_{10}C_2=45$ 個

（別解）

十の位が1ならば一の位は0だけだから1通り，十の位が2ならば一の位は0,1の2通り，・・・，十の位が9ならば一の位は0,1,・・・,8の9通り．ゆえに，1+2+3+・・・+9=45通り

例 2桁の整数のうち，$88$ , $87$ のように一の位の数が十の位の数と等しいか又は小さいものの総数

（解答）

10個の数字 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 から重複を許して2つを選べば並べ方は決まる（大きい方を前にする）：

${}_{10}H_2={}_{10+2-1}C_2={}_{11}C_2=55$ 個

ただし，このうち1つは 00 になり2桁とは呼ばないから，55−1=54個（別解）

異なる場合が45個，等しい場合が（11,22,...,99の）9個あるから45+9=54個

重複順列と重複組合せなどの関係は簡単ではない.

♪ややむずかしい♪

問題1

[ 採点する ] [ Help ]

4桁の自然数のうちで $1257$ , $2389$ のように各位の数が順に大きくなるものは何通りあるか.

126 通り ○

0から9までの10種類の数字から異なる4個の組合せを選べば並べ方は決まるが，その中に0が含まれていると先頭に来るから3桁になる．そこで，1から9までの9種類の数字から異なる4個の組合せを選べばよい．

$${}_9C_4=\frac{9!}{4!5!}=126 \text{ 通り}$$

問題2

[ 採点する ] [ Help ]

4桁の自然数のうちで $5139$ , $3337$ のように各位の数が奇数からなるものは何通りあるか.

625 通り ○

奇数は1,3,5,7,9の5種類あり，これらから重複を許して4個取って並べるとよいから，

$${}_5\Pi_4=5^4=625 \text{ 通り}$$

（特に $\Pi$ という記号を使わなくてもよい．）

問題3

[ 採点する ] [ Help ]

同質に作られた5個のボールを4人の子どもに分ける方法は何通りあるか．ただし，1個ももらえない子どもがいてもよいとする.

56 通り ○

4人の子どもの名前を，重複を許して5回呼ぶとよいから，

$${}_4H_5={}_{4+5-1}C_5={}_8C_5=56 \text{ 通り}$$

問題4

[ 採点する ] [ Help ]

$x+y+z=5$ の正の整数解は何通りあるか.

6 通り ○

$x$ , $y$ , $z$ にそれぞれ1ずつ配っておき，残り2を重複を許して3つに分ければよいから，

$${}_3H_2={}_{3+2-1}C_2={}_4C_2=6 \text{ 通り}$$

問題5

[ 採点する ] [ Help ]

$aaabbc$ の6文字のうち4文字を使ってできる順列の総数を求めよ.

38 通り ○

（ア）$a$ を3個使うとき

$aaab \rightarrow \frac{4!}{3!1!}=4$ 通り

$aaac \rightarrow \frac{4!}{3!1!}=4$ 通り

（イ）$a$ を2個使うとき

$aabb \rightarrow \frac{4!}{2!2!}=6$ 通り

$aabc \rightarrow \frac{4!}{2!1!1!}=12$ 通り

（ウ）$a$ を1個使うとき

$abbc \rightarrow \frac{4!}{2!1!1!}=12$ 通り

計 $38$ 通り

問題6　次の空欄を埋めよ.

[ 採点する ] [ Help ]

${}_nP_r=$ n ${}_{n-1}P_{r-1}$ ○

$\frac{{}_{n-1}C_{r-1}}{{}_nC_r}=\frac{r}{n}$ ○○

${}_nH_r=\frac{n}{r}{}_{n+1}H_{r-1}$ ○○

${}_nP_r=\frac{n!}{(n-r)!}$ , ${}_{n-1}P_{r-1}=\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$ だから,

$${}_nP_r=n\cdot{}_{n-1}P_{r-1}$$

${}_nC_r=\frac{n!}{(n-r)!r!}$ , ${}_{n-1}C_{r-1}=\frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!}$ だから,

$$\frac{{}_{n-1}C_{r-1}}{{}_nC_r}=\frac{r}{n}$$

${}_nH_r=\frac{(n+r-1)!}{(n-1)!r!}$ , ${}_{n+1}H_{r-1}=\frac{(n+r-1)!}{n!(r-2)!}$ だから,

$${}_nH_r=\frac{n}{r}{}_{n+1}H_{r-1}$$