== 同じものがあるときの順列 ==

■解説

《要約》

○　同じもの a が p 個，b が q 個，合計 $p+q$ 個あるとき，これらを全部使って1列に並べる順列の総数は

$$\frac{(p+q)!}{p!q!} \text{ 通り}$$

○　同じもの a が p 個，b が q 個，c が r 個，…，合計 n 個あるとき，これらを全部使って1列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \text{ 通り}$$

※　この公式は，全部使う場合の順列の総数を表わしており，その一部分だけを使う場合の順列の総数を求めるには，それぞれの構成に応じて場合分けして求める必要がある．

（解説）

例えば，すべて異なる 5 個の文字 $a_1a_2a_3b_1b_2$ を1列に並べる順列の総数は ${}_5P_5=5!=120$ 通りとなるが，

それらの中には次のようなものがある．

$a_1a_2b_1a_3b_2$　　$a_1a_3b_1a_2b_2$

$a_2a_1b_1a_3b_2$　　$a_2a_3b_1a_1b_2$

$a_3a_1b_1a_2b_2$　　$a_3a_2b_1a_1b_2$

これらは，a_n が異なるものとして区別し，お互いの位置だけを交換して得られたもので，もし a が同じものなら，これらは1つの順列となる．したがって，a を区別したときは，a が同じものであるときと比較して，それらの内部交換だけで $3!$ 倍多くなっている．

さらに，b_n を異なるものとして区別し，お互いの位置だけを交換したとき，上の順列は $2!$ 倍多くなる．

$a_1a_2b_1a_3b_2$	$a_1a_3b_1a_2b_2$	$a_1a_2b_2a_3b_1$	$a_1a_3b_2a_2b_1$
$a_2a_1b_1a_3b_2$	$a_2a_3b_1a_1b_2$	$a_2a_1b_2a_3b_1$	$a_2a_3b_2a_1b_1$
$a_3a_1b_1a_2b_2$	$a_3a_2b_1a_1b_2$	$a_3a_1b_2a_2b_1$	$a_3a_2b_2a_1b_1$

したがって，同じもの a が 3 個，b が 2 個，合計 5 個あるとき，これらを全部使って1列に並べる順列の総数は

$$\frac{5!}{3!2!} \text{ 通り}$$

になる．

これを一般化すると，同じもの a が p 個，b が q 個，合計 $p+q$ 個あるとき，これらを全部使って1列に並べる順列の総数は

$$\frac{(p+q)!}{p!q!} \text{ 通り}$$

となって，上の公式が得られる．

3種類以上の文字から成るときも同様．

例1

a が4個，b が3個，合計7個の文字があるとき，これら全部を1列に並べてできる順列の総数は

$$\frac{7!}{4!3!}=35$$

例2

a が4個，b が3個，c が2個，合計9個の文字があるとき，これらを全部を1列に並べてできる順列の総数は

$$\frac{9!}{4!3!2!}=1260$$

例3

a が3個，b が2個，c が1個，合計6個の文字があるとき，これらのうち3個を使ってできる順列の総数は

（ア）a を3個使うとき

aaa の並べ方 → 1 通り

（イ）a を2個使うとき

aab の並べ方 → $\frac{3!}{2!1!}=3$ 通り

aac の並べ方 → $\frac{3!}{2!1!}=3$ 通り

（ウ）a を1個使うとき

abb の並べ方 → $\frac{3!}{1!2!}=3$ 通り

abc の並べ方 → $3!=6$ 通り

（エ）a を使わないとき

bbc の並べ方 → $\frac{3!}{2!1!}=3$ 通り

計 19 通り

■参考：組合せを用いる解説■

同じものがあるときの順列の総数は組合せは ${}_nC_r$ を用いて解説されることが多いので，これらの関係を示す．

$aabbb$ のように同じものを2個と3個含む文字列を並べ替えてできる順列の総数は，

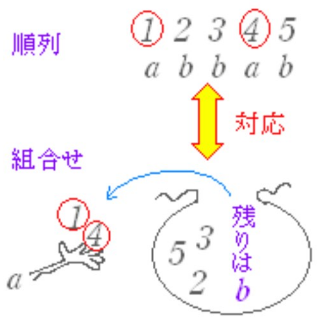
$$\frac{5!}{3!2!} \text{ 通り}$$

であるが，それぞれにおいて a の場所さえ決めれば残りの場所は b に決まる．

例えば $abbab$ では a の番号を1番と4番の2つに決めれば残り2，3，5番は b になる．したがって，$aabbb$ の並べ替え方は，異なる5個の番号札から a の行き先の番号札2個をもらう方法の数 ${}_5C_2$ に等しく，組合せの公式

$${}_5C_2=\frac{5!}{2!3!}=10$$

でも求められる．



※　もちろん，b の行き先の番号札3個をもらう方法の数 ${}_5C_3$ で計算しても同じになる．

$${}_5C_3=\frac{5!}{3!2!}=10$$

《問題》　正しいものを選んでください．

≪1≫

$1,1,1,1,2,2,3$ の7個の数字を使ってできる7桁の整数の個数を求めよ．

≪2≫

$coffee$ の6個の文字を全部使ってできる順列の総数を求めよ．

12　　18　　20　　35　　36　　38　　105

12 18 20 35 36 38 105

120 180 280 720 840 1440

○ 解説

$\dfrac{7!}{4!2!1!}=105$ 通り

120 180 280 720 840 1440

○ 解説

c が1個，o が1個，f が2個，e が2個あるから

$\dfrac{6!}{1!1!2!2!}=180$ 通り

≪3≫

a,a,a,b,b,c の6個の文字を並べ替えてできる順列のうち b が互いに隣り合っているものの総数を求めよ．

12 18 20 35 36 38 105

120 180 280 720 840 1440

○ 解説

a が3個，c が1個，b の組が1個，計5個のものがあると考えると

$\dfrac{5!}{3!1!1!}=20$ 通り

≪4≫

a が3個，b が2個，c が1個，合計6個の文字があるとき，これらのうち4個を使ってできる順列の総数は

12 18 20 35 36 38 105

120 180 280 720 840 1440

○ 解説

（ア） a を3個使うとき

$aaab$ の並べ方 → $\dfrac{4!}{3!1!}=4$ 通り

$aaac$ の並べ方 → $\dfrac{4!}{3!1!}=4$ 通り

（イ） a を2個使うとき

$aabb$ の並べ方 → $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 通り

$aabc$ の並べ方 → $\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$ 通り

（ウ） a を1個使うとき

$abbc$ の並べ方 → $\dfrac{4!}{2!1!1!}=12$ 通り

（エ） a が0個ではできない．

以上から，計 38 通り

≪5≫

$a,b,c,1,2,3,4$ の7個の文字を並べ替えてできる順列のうち，$314ab2c$ のように a,b,c はこの順に並んでいるものは何通りあるか．

12 18 20 35 36 38 105

120 180 280 720 840 1440

○ 解説

順序が決められている（並べ替えできない）ものは「同じものがある」のと同様だから同じ文字3個と異なる数字4個があるとみなせばよい．（ $a,a,a,1,2,3,4$ など）

これらの並べ方の総数は

$\dfrac{7!}{3!}=840$ 通り

≪6≫

$a,b,c,1,2,3,4$ の7個の文字を並べ替えてできる順列のうち，$314ab2c$ のように a,b,c はこの順に並んでおり，さらに，$a12b34c$ のように a,b,c も $1,2,3,4$ もこの順に並んでいるものは何通りあるか．

12 18 20 35 36 38 105

120 180 280 720 840 1440

○ 解説

英字3個，数字4個が各々同じとみなせばよい．（ $a,a,a,1,1,1,1$ など）

これらの並べ方の総数は

$\dfrac{7!}{3!4!}=35$ 通り