

== 階乗 ==

順列や組み合わせでは、 $4 \times 3 \times 2 \times 1$  のように整数を階段状に掛ける計算がしばしば登場します。これを表すために、階乗という記号を使います。

【階乗の定義】

正の整数  $n$  から1つずつ小さい整数を1まで順に掛けた積を  $n!$  で表します。

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

「 $n$  の階乗(かいじょう)」と読みます。

階乗は、正の整数に対して定義されていますので、 $(-2)!$  のような「負の数の階乗」や、 $1.5!$  のような「小数値の階乗」は定義されません。 $0!$  は後に順列や組合せに関連して、別途定義されます。

【階乗の例】

$0! = 1$  (←例外、重要、後に順列・組合せの項目で定義されます。)

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

$$7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

負の数! ←なし  
小数! ←なし  
分数! ←なし

このように階乗は、階段状に次々と掛ける計算になりますので、 $n$  が大きくなると急速に大きくなり、 $100!$  (158桁の整数)などは筆算や普通のコンピュータソフトでは求められません。

問題 次の値を求めてください。

(1)  $4! + 6! =$

採点する やり直す HELP

(2)  $(2+3)! =$

採点する やり直す HELP

(3)  $(7-5)! =$

採点する やり直す HELP

(4)  $\frac{7!}{5!} =$

採点する やり直す HELP

(5)  $1!0! =$

採点する やり直す HELP

(6)  $\frac{6!}{4!2!} =$

採点する やり直す HELP

【駅の風景で分かる階乗計算】

5両編成の列車の前に4両編成の列車を止めると5両目が見えます

$$\frac{5!}{4!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$$



【階乗計算の例】

$$\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5 \cdot 4 = 20$$

$$\frac{5!}{5!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$$

$$(3+2)! = 5! = 120$$

$$(3-2)! = 1! = 1$$

【よくある間違い】

階乗の「カッコ」は外れません (文字式の計算で慣れているような、カッコを外す公式はありません。カッコの中から計算するしかありません。)

$$(a-b)! \rightarrow \times a!-b!$$

したがって、 $(3-2)!$  の計算は  $\times (3-2)! \rightarrow 3!-2! \rightarrow 6-2=4$

$$\circ (3-2)! = 1! = 1$$

(参考)より進んだ学習のために

大学では、階乗記号を重ねたものは別の意味が定義されています。

$3!!$  は  $(3!)! \rightarrow 6! = 720$  ではなく、奇数だけを掛けたもの  $3!! = 3 \times 1 = 3$  を表す。

同様に  $4!!$  は  $(4!)! \rightarrow 24!$  ではなく、偶数だけを掛けたもの  $4!! = 4 \times 2 = 8$  を表す。

⇒ 高校では  $n!!$  という記号はうっかり使わない方がいい。

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

だから

$$4! + 6! = 24 + 720 = 744$$

カッコの中を先に計算します。

$$(2+3)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

階乗のカッコは単純にははずれないので、次のような間違いをしないように気をつけましょう。

$$(2+3)! \rightarrow 2!+3! \rightarrow 2+6 \times \times$$

カッコの中を先に計算します。

$$(7-5)! = 2! = 2 \times 1 = 2$$

階乗のカッコは単純にははずれないので、次のような間違いをしないように気をつけましょう。

$$(7-5)! \rightarrow 7!-5! \rightarrow ?? \times \times$$

解説の階乗計算の例にあるように、できるだけ約分して簡単にします。

$$\frac{7!}{5!} = \frac{7 \times 6 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 7 \times 6 = 42$$

$0! = 1$  です。(本来、階乗記号は正の整数に対して定義されますが、 $0!$  は解説にあるように、順列・組合せの公式を煩わしい制約なしに使えるようにするための「約束事」です。)

他方で、 $1!$  も  $1$  なので

結局、 $1!0! = 1 \times 1 = 1$  になります。

解説の階乗計算の例にあるように、できるだけ約分して簡単にします。

$$\frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1}{\cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{30}{2} = 15$$

