== 二項定理，多項定理 ==

【要点】

○ 二項定理

$(a+b)^n$ を展開したとき，

- $a^{n-r}b^r$ の係数は ${}_nC_r$ になる.
  （${}_nC_r$ を二項係数という.）
- すなわち，一般項は ${}_nC_r a^{n-r}b^r$ になる.（$r=0$〜n）
- 展開式を全部書くと
  $(a+b)^n={}_nC_0a^n+{}_nC_1a^{n-1}b+{}_nC_2a^{n-2}b^2+\cdots$
  $+{}_nC_ka^{n-k}b^k+\cdots+{}_nC_{n-1}ab^{n-1}+{}_nC_nb^n$
- 展開式をシグマ記号を用いて書くと

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_nC_ka^{n-k}b^k$$

（※Σについては 初心者向き解説, 問題練習, Σの変形 参照. ただし，Σ記号が分からなくても，以下の解説は理解できる.）

例
$(a+b)^7$ を展開したとき，

- a^5b^2 の係数は ${}_7C_2=\frac{7!}{5!2!}=21$ になる.
- 一般項は ${}_7C_ra^{7-r}b^r$
- 展開式を全部書くと
  $(a+b)^7={}_7C_0a^7+{}_7C_1a^6b+{}_7C_2a^5b^2+{}_7C_3a^4b^3$
  $+{}_7C_4a^3b^4+{}_7C_5a^2b^5+{}_7C_6ab^6+{}_7C_7b^7$
  $=a^7+7a^6b+21a^5b^2+35a^4b^3+35a^3b^4+21a^2b^5+7ab^6+b^7$
- 展開式をシグマ記号を用いて書くと

$$(a+b)^7=\sum_{k=0}^{7}{}_7C_ka^{7-k}b^k$$

※（第一印象で悩みそうな箇所）なぜ $a^{n-r}b^r$ の係数を求めるのか？ なぜ a^rb^{n-r} にしないのか？ → ${}_nC_r={}_nC_{n-r}$ が成り立つので，どちらで考えてもよいが，多くの教科書や参考書では，左に書いた形（b の係数が増える順）に書いてあります.

○ 多項定理

$(a+b+c)^n$ を展開したとき，

- $a^pb^qc^r$ の係数は $\frac{n!}{p!q!r!}$ になる.
  （ただし，$p+q+r=n$, $0\leqq p,q,r\leqq n$）
- すなわち，一般項は $\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ になる.
  （ただし，$p+q+r=n$, $0\leqq p,q,r\leqq n$）
- 展開式は

$$(a+b+c)^n=\sum_{\substack{p+q+r=n\\0\leqq p,q,r\leqq n}}\frac{n!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$$

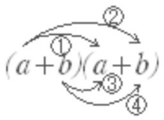
（このΣ記号は，条件に合うものを全部加えることを示す.）

例
$(a+b+c)^6$ を展開したとき，

- a^3b^2c の係数は $\frac{6!}{3!2!1!}$ になる.
- 一般項は $\frac{6!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$ になる.
  （ただし，$p+q+r=6$, $0\leqq p,q,r\leqq 6$）
- 展開式は
  $(a+b+c)^6$
  $=a^6+\frac{6!}{5!1!0!}a^5b+\frac{6!}{5!0!1!}a^5c+\frac{6!}{4!1!1!}a^4bc+\cdots$
  $+\frac{6!}{p!q!r!}a^pb^qc^r+\cdots+\frac{6!}{0!0!6!}c^6$
- 展開式をΣ記号で表わすと

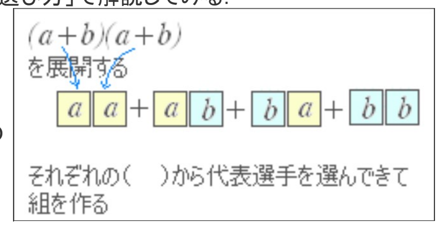
$$(a+b+c)^6=\sum_{\substack{p+q+r=6\\0\leqq p,q,r\leqq 6}}\frac{6!}{p!q!r!}a^pb^qc^r$$

【解説】二項定理



通常，式の展開は次のような順序で，「総当たりで」掛けると考えることが多いが，二項定理，多項定理の解説はこの方法では分かりにくいので，「代表選手の選び方」で解説してみる.

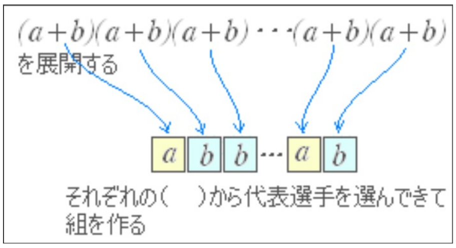
右図のように各々の（ ）からどちらか1つの項 a , b を選んで取り出し，合計 2 個からなる文字の組を考える.



○「同じものがあるときの順列」で考える方法

$(a+b)^n$ を展開したときの $a^{n-r}b^r$ の係数を考える.

各々の（ ）からどちらか1つの項 a , b を選んで取り出し，合計 n 個からなる文字の組を考える.



できた組を全部足したものが展開式になるが，例えば $ababb$, $bbaab$ などは同類項で a^2b^3 になり，それらが「出てきた回数」が

（■→続き■）

例えば $(a+b)^5$ を展開するとき，左図のような選び方をすると，$abbab$ という項が1つできる. これは，a^2b^3 になる.

しかし，a^2b^3 になるのはこれだけではない. a^2b^3 になるものを全部並べると，次のようになる.

$aabbb$, $ababb$
$abbab$, $abbba$
$baabb$, $babab$
$babba$, $bbaab$
$bbaba$, $bbbaa$

ところで，a^2b^3 が 10個あるから，これらを加えたとき，係数は 10 になり，$10a^2b^3$ となる.

○ 組合せで考える方法

「同じものがあるときの順列の総数」は，組合せに直して求めることができる.

a が $n-r$ 個，b が r 個，それぞれ同じものがある合計 n 個の文字 $abb\cdots ab$ を並べ替えてできる順列の総数を，図のように1〜nのn個の番号札をあらかじめ用意しておき，b の行き先の番号札をもらう方法で考える.

（a の行き先の番号札を $n-r$ 個もらうと考えてもよい.）

上の図のように，2,3,･･･，nの札をもらったとき，その場所に b が入ると決めておく（ a の場所は，自動的に決まり，残りの $n-r$ 個の場所となる.）と，b の行き先 r 個の番号札のもらい方が並

a^2b^3 の係数になる.

そこで, $abb\cdots ab$ など n 個の文字のうち, a が $n-r$ 個, b が r 個ある順列を並べ替えてできる順列の総数を数える.

全部異なるものが n 個あるときは, 並べ替えてできる順列は $n!$ 個あるが, a は同じものなので, その内部交換でできる $(n-r)!$ 通りは別のものができないから, $n!$ 個とすると $(n-r)!$ 倍だけ数え過ぎで, 正しくは $\frac{n!}{(n-r)!}$ 通り.

同様にして, b も同じものなので, その内部交換でできる $r!$ 通りは別のものができないから, 上のように $\frac{n!}{(n-r)!}$ 通りとすると $r!$ 倍だけ数え過ぎで, 正しくは $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ 通り.

結局, a が $n-r$ 個, b が r 個, それぞれ同じものがある合計 n 個の文字 $abb\cdots ab$ を並べ替えてできる順列の総数は,

$$\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

通りだから, **上のように代表の組を作ると**$a^{n-r}b^r$ は $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ 回登場する.

これらの同類項をまとめると, 係数は $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ になる.
(■→続く■)

べ方の総数に等しく, ${}_nC_r$ すなわち $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ 通りになる.

$a^{n-r}b^r$ は $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ 回登場するから,

これらを同類項をまとめると, 係数は $\frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ になる.

【解説】多項定理

二項定理のときと同様に「同じものがあるときの順列」で考えると

$(a+b+c)^n$ を展開したとき, $a^pb^qc^r$ が登場する回数は,

a が p 個, b が q 個, c が r 個それぞれ同じものがある合計 n 個の文字 $abbc\cdots ab$ を並べ替えてできる順列の総数になり,

$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$ 通り

$a^pb^qc^r$ を同類項としてまとめると, その係数は

$$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$$

○ 組合せで考える方法

多項定理は, 最近の高校の教科書では, 組合せを2段階適用して解説されている.

1〜nまで合計n個の番号札をあらかじめ用意しておき, 文字 a の行き先 p 個, 文字 b の行き先 q 個, 文字 c の行き先 r 個をもらう方法を数えると,

a の札のもらい方は ${}_nC_p$ 通り,

その各々について, 残り $n-p$ 枚の番号札のうち b の札のもらい方は ${}_{n-p}C_q$ 通り,

(残りは自動的に c の札となる.)

もらい方の総数は, ${}_nC_p\times{}_{n-p}C_q=\frac{n!}{p!\,(n-p)!}\,\frac{(n-p)!}{(n-p-q)!\,q!}$

$=\frac{n!}{p!\,q!\,(n-p-q)!}$

ここで, $n-p-q=r$ であるから,

$\frac{n!}{p!\,q!\,r!}$

に等しい.

■例題1(二項定理)

(1) $(2x-3)^5$ の展開式における x^2 の係数を求めよ.

■解説

(1) 一般項は ${}_5C_r(2x)^{5-r}(-3)^r=2^{5-r}(-3)^r\frac{5!}{(5-r)!\,r!}x^{5-r}$

x^2 となるのは, $r=3$ のとき.

このとき係数は, $2^2(-3)^3\frac{5!}{2!\,3!}=-1080$

※ この種の問題で, 展開式を全部書くのは無駄が多いので, 必要な項だけを書けばよい.

※ 文字の部分も付けて「一般項は」と書き始めるとうまくいく.

【重要】 二項定理の公式:

${}_nC_r a^{n-r}b^r$

において, a^{n-r}, b^r については

○「係数も何乗かする」ことが重要

… 係数$^{\text{何乗}}\times{}_nC_r$ が係数になる

○ 負の数を奇数乗すると負の数になる.

(2) $(2x^2-\frac{1}{3x})^7$ の展開式における x^2 の係数を求めよ.

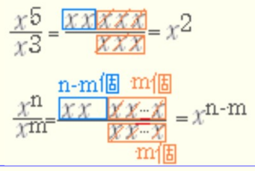
(2) 一般項は ${}_7C_r(2x^2)^{7-r}(-\frac{1}{3x})^r$

$=2^{7-r}(-\frac{1}{3})^r\frac{7!}{(7-r)!\,r!}x^{14-3r}$ (右の囲み欄→)

x^2 となるのは, $14-3r=2$ より, $r=4$のとき.

このとき係数は, $2^3(-\frac{1}{3})^4\frac{7!}{3!\,4!}=\frac{280}{81}$

(数IIで習う指数法則)



一般に

$\frac{x^n}{x^m}=x^{n-m}$

が成り立つ.

上の問題では，$\frac{x^{14-2r}}{x^r}=x^{14-3r}$ と変形するとよい．

《問題》

≪1≫

$(3a-2b)^5$ の展開式における a^2b^3 の係数を求めよ．

-1080　-720　-20　$\frac{20}{27}$　$\frac{27}{20}$

6　10　15　54　80　161

○ 解説

(1)　一般項は，${}_5C_r(3a)^{5-r}(-2b)^r$

$=3^{5-r}(-2)^r\frac{5!}{(5-r)!r!}a^{5-r}b^r$

a^2b^3 となるのは $r=3$のとき．

このとき係数は $3^2(-2)^3\frac{5!}{2!3!}=9\times(-8)\times10=-720$

≪2≫

$(x^2-\frac{3}{x})^4$ の展開式における x^2 の係数を求めよ．

-1080　-720　-20　$\frac{20}{27}$　$\frac{27}{20}$

6　10　15　54　80　161

○ 解説

一般項は ${}_4C_r(x^2)^{4-r}(-\frac{3}{x})^r=(-3)^r\frac{4!}{(4-r)!r!}x^{8-3r}$

x^2 となるのは，$8-3r=2$ より，$r=2$のとき．

このとき係数は，$(-3)^2\frac{4!}{2!2!}=9\times6=54$

≪3≫

$(2x^2-\frac{1}{3x})^6$ の展開式における定数項を求めよ．

-1080　-720　-20　$\frac{20}{27}$　$\frac{27}{20}$

6　10　15　54　80　161

○ 解説

定数項とは，x^0 となる項（実際にはその係数）のこと．

一般項は ${}_6C_r(2x^2)^{6-r}(-\frac{1}{3x})^r$

$=2^{6-r}(-\frac{1}{3})^r\frac{6!}{(6-r)!r!}x^{12-3r}$

x^0 となるのは，$12-3r=0$ より，$r=4$のとき．

このとき係数は，$2^2(-\frac{1}{3})^4\frac{6!}{2!4!}=\frac{20}{27}$

≪4≫

$(2x-3y+z)^5$ の展開式における xy^3z の係数を求めよ．

-1080　-720　-20　$\frac{20}{27}$　$\frac{27}{20}$

6　10　15　54　80　161

○ 解説

一般項は

$\frac{5!}{p!q!r!}(2x)^p(-3y)^qz^r=2^p(-3)^q\frac{5!}{p!q!r!}x^py^qz^r$

xy^3z となるのは，$p=1,q=3,r=1$ のとき

このとき係数は，

$2\times(-3)^3\frac{5!}{1!3!1!}=2\times(-27)\times20=-1080$

≪5≫

$(x^2+x+2)^5$ の展開式における x^5 の係数を求めよ．

-1080　-720　-20　$\frac{20}{27}$　$\frac{27}{20}$

6　10　15　54　80　161

○ 解説

一般項は $\frac{5!}{p!q!r!}(x^2)^px^q2^r=2^r\frac{5!}{p!q!r!}x^{2p+q}$

x^5 となるのは，p,q,r が

$p+q+r=5$ …(i)

$2p+q=5$ …(ii)

$0\leqq p,q,r\leqq5$ …(iii)

を満たすときである．

【重要】3個（p,q,r）の未知数に対して方程式が2個（(iii)は不等式）であるため，p,q,r は解がただ一つに定まらない．むしろ，次のように「順に総当たりで調べる」と考えるとよい．

(iii)により負にならない整数 p,q,r で，(ii)を満たすものは

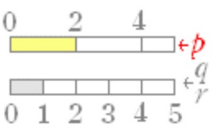
[1] $p=0$ のとき，(ii)より $q=5$ → (i)より $r=0$

[2] $p=1$ のとき，(ii)より $q=3$ → (i)より $r=1$

[3] $p=2$ のとき，(ii)より $q=1$ → (i)より $r=2$

[*] $p>2$ のとき，(ii)より解なし

係数は[1]より，$2^0\frac{5!}{0!5!0!}=1$



≪6≫

$(x^2+x-\frac{2}{x})^6$ の展開式における x^3 の係数を求めよ．

-1080　-720　-20　$\frac{20}{27}$　$\frac{27}{20}$

6　10　15　54　80　161

○ 解説

一般項は

$\frac{6!}{p!q!r!}(x^2)^px^q(-\frac{2}{x})^r=(-2)^r\frac{6!}{p!q!r!}x^{2p+q-r}$

$p+q+r=6$ …(i)

$2p+q-r=3$ …(ii)

$0\leqq p,q,r\leqq6$ …(iii)

(i)+(ii)より $3p+2q=9$ …(iv)

[1] $p=0$ のとき，q の整数解なし

[2] $p=1$ のとき，$q=3,r=2$ 係数は $(-2)^2\frac{6!}{1!3!2!}=240$

[3] $p=2$ のとき，q の整数解なし

[4] $p=3$ のとき，$q=0,r=3$ 係数は $(-2)^3\frac{6!}{3!0!3!}=-160$

[*] $p>3$ のとき，解なし

以上より 80

0 1 2 3 4 5

[2]より, $2^1\frac{5!}{1!3!1!}=40$

pは係数が大きいので場合分けが少なくて済む

[3]より, $2^2\frac{5!}{2!1!2!}=120$

計 161

■二項係数の性質 （※ 発展的な内容）

【主な公式】

${}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_k+\cdots+{}_nC_n=2^n$ … (1)

${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$ … (2)

${}_nC_1+2{}_nC_2+3{}_nC_3+\cdots+k{}_nC_k+\cdots+n{}_nC_n=n\cdot 2^{n-1}$ … (3)

$2\cdot 1\cdot{}_nC_1+3\cdot 2\cdot{}_nC_2+4\cdot 3\cdot{}_nC_3+\cdots+n(n-1){}_nC_n=n(n-1)2^{n-1}$ … (4)

$1^2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+3^2{}_nC_3+\cdots+n^2{}_nC_n=n(n+1)2^{n-2}$ … (5)

${}_nC_0+\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{1}{3}{}_nC_2+\cdots+\frac{1}{k+1}{}_nC_k+\cdots+\frac{1}{n+1}{}_nC_n=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ … (6)

${}_nC_0{}^2+{}_nC_1{}^2+{}_nC_2{}^2+\cdots+{}_nC_k{}^2+\cdots+{}_nC_n{}^2=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$ … (7)

※ 高校ではこれらの公式を覚える必要はない．必要に応じて作ればよい．微分・積分を利用する証明が簡単である．（母関数 $f(x)=(1+x)^n$ から次々に導かれる．）

二項定理により，
$f(x)=(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_kx^k+\cdots+{}_nC_nx^n$ とおく
$x=1$ を代入すると，
$f(1)=2^n={}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots+{}_nC_k+\cdots+{}_nC_n$ → (1)

$x=-1$ を代入すると，
$f(-1)=0={}_nC_0-{}_nC_1+{}_nC_2-\cdots+(-1)^k{}_nC_k+\cdots+(-1)^n{}_nC_n$
したがって，${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots$
ところで(1)により，両辺の和は 2^n だから，
${}_nC_0+{}_nC_2+{}_nC_4+\cdots={}_nC_1+{}_nC_3+{}_nC_5+\cdots=2^{n-1}$ → (2)

$f(x)$ を x で微分すると
$f'(x)=n(1+x)^{n-1}={}_nC_1+2{}_nC_2x+\cdots+k{}_nC_kx^{k-1}+\cdots+n{}_nC_nx^{n-1}$
$x=1$ を代入すると，
$f'(1)=n\cdot 2^{n-1}={}_nC_1+2{}_nC_2+\cdots+k{}_nC_k+\cdots+n{}_nC_n$ → (3)

$f'(x)$ を x で微分すると
$f''(x)=n(n-1)(1+x)^{n-2}=2\cdot 1\cdot{}_nC_2+3\cdot 2\cdot{}_nC_3x^1+\cdots+k\cdot(k-1)\cdot{}_nC_kx^{k-2}+\cdots+n\cdot(n-1)\cdot{}_nC_nx^{n-2}$
$x=1$ を代入すると，
$f''(x)=n(n-1)\cdot 2^{n-2}=2\cdot 1\cdot{}_nC_2+3\cdot 2\cdot{}_nC_3+\cdots+k\cdot(k-1)\cdot{}_nC_k+\cdots+n\cdot(n-1)\cdot{}_nC_n$ → (4)

上の(4)のように単純に微分すれば x の次数が下がるため，$k-1$ が掛けられることになるが，両辺に x を掛けてから微分すると k を掛けることができる．
$xf'(x)=nx(1+x)^{n-1}={}_nC_1x+2{}_nC_2x^2+\cdots+k{}_nC_kx^k+\cdots+n{}_nC_nx^n$
両辺を x で微分すると
$n(1+x)^{n-1}+n(n-1)x(1+x)^{n-2}=1^2{}_nC_1+2^2{}_nC_2x+3^2{}_nC_3x^2+\cdots+k^2{}_nC_kx^{k-1}+\cdots+n^2{}_nC_nx^{n-1}$
$x=1$ を代入すると，
$n\cdot 2^{n-1}+n(n-1)\cdot 2^{n-2}=1^2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+3^2{}_nC_3+\cdots+n^2{}_nC_n$
$n(n+1)\cdot 2^{n-2}=1^2{}_nC_1+2^2{}_nC_2+3^2{}_nC_3+\cdots+n^2{}_nC_n$ → (5)

$\int_0^1 x^kdx=\left[\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1=\frac{1}{k+1}$ に注意して，区間 $0\leqq x\leqq 1$ で $f(x)$ の定積分を求めると，
$\int_0^1(1+x)^ndx=\int_0^1{}_nC_0dx+{}_nC_1\int_0^1xdx+{}_nC_2\int_0^1x^2dx+\cdots+{}_nC_k\int_0^1x^kdx+\cdots+{}_nC_n\int_0^1x^ndx$
左辺$=\left[\frac{(1+x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$
右辺$={}_nC_0+\frac{1}{2}{}_nC_1+\frac{1}{3}{}_nC_2+\cdots+\frac{1}{k+1}{}_nC_k+\cdots+\frac{1}{n+1}{}_nC_n$ → (6)

$(1+x)^{2n}$ を $(1+x)^n(x+1)^n$ に分けて，各々 x^n の係数を求めて比較する．
$(1+x)^{2n}$ の展開式における x^n の係数は，${}_{2n}C_n=\frac{(2n)!}{n!\,n!}$ …(A)

$(1+x)^n={}_nC_0+{}_nC_1x+{}_nC_2x^2+\cdots+{}_nC_kx^k+\cdots+{}_nC_nx^n$

$(x+1)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2} + \cdots + {}_nC_kx^{n-k} + \cdots + {}_nC_n$

$(1+x)^n(x+1)^n$ において，この式で上下に対応する項を掛けたときだけ x^n となるから，その係数は

${}_nC_0{}^2 + {}_nC_1{}^2 + {}_nC_2{}^2 + \cdots + {}_nC_k{}^2 + \cdots + {}_nC_n{}^2$ …(B)

(A)(B)は等しい． →(7)