== 和の法則 ==

【例1】
大小2個のさいころを投げて、出た目の和が3の倍数になる場合の数を調べたいとします。

（解答）
右図1のように目の和の表を作ると
目の和が 3 になる場合が2通り
目の和が 6 になるのが5通り
目の和が 9 になるのが4通り
目の和が 12 になるのが1通り
これらの中に「重複して数えているものはありません」。
したがって、3の倍数になるのは
2+5+4+1＝12通り

3で割り切れるのが3の倍数
例えば3, 6, 9, 12は3の倍数

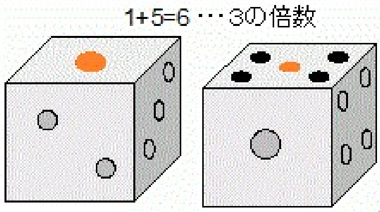

図1

和	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

一般に、次の法則が成り立ちます。

【和の法則】
2つの事柄 A 、B は同時には起こらないとします.
A の起こり方が m 通り、B の起こり方が n 通りあるとき, A または B が起こる場合の数は $m+n$ 通りになります.

■和の法則を使うかどうかの見分け方■
「同時には起こらない」とは、時間のことではなく、論理的に両立しないことを表しています。
これにより「重複がない」ことになります。重複がないときに「どれかが起こる」場合の数は和で求められるというのが和の法則です。

例1では、目の和が3であれば目の和は6ではありません。つまり、目の和が3であることは6であることと両立しません。他の場合も、重複して数える可能性はありません。

【例2】
1つのさいころを2回投げるとき、2回目に出た目が1回目に出た目の2倍以上になる場合の数は何通りありますか。

（解答）
1回目が1のとき･･･2回目は、2,3,4,5,6の5通り
1回目が2のとき･･･2回目は、4,5,6の3通り
1回目が3のとき･･･2回目は、6の1通り
1回目が4以上のときは、該当する場合の数はありません。
以上により、5+3+1＝9通り

1回＼2回	1	2	3	4	5	6
1	×	○	○	○	○	○
2	×	×	×	○	○	○
3	×	×	×	×	×	○
4	×	×	×	×	×	×
5	×	×	×	×	×	×
6	×	×	×	×	×	×

問題1 大小2つのさいころを投げるとき，出た目の和が10以上になる場合の数を求めてください．

6 通り ○

採点する やり直す HELP

図1のように，目の和が10になる場合が3通り，目の和が11になるのが2通り，目の和が12になるのが1通り．
和の法則により3+2+1＝6通り．

問題2 大小2つのさいころを投げるとき，出た目の最小値が3となる場合の数を求めてください．

7 通り ○

採点する やり直す HELP

最小値が3となるためには，少なくとも1つの目が3となっていて，もう一つの目が3以上となっていることが条件となります．
右図の○印を数えると，7通り

	1	2	3	4	5	6
1	×	×	×	×	×	×
2	×	×	×	×	×	×
3	×	×	○	○	○	○
4	×	×	○	×	×	×
5	×	×	○	×	×	×
6	×	×	○	×	×	×

問題3 大小2つのさいころを投げるとき，出た目の最大値が3以上4以下となる場合の数を求めてください．

12 通り ○

採点する やり直す HELP

最大値が3となるためには，少なくとも1つの目が3となっていて，もう一つの目が3以下となっていることが条件となります．（右図の○印）
最大値が4となるためには，少なくとも1つの目が4となっていて，もう一つの目が4以下となっていることが条件となります．（右図の□印）
右図の○と□を数えると，合計12通り

	1	2	3	4	5	6
1	×	×	○	□	×	×
2	×	×	○	□	×	×
3	○	○	○	□	×	×
4	□	□	□	□	×	×
5	×	×	×	×	×	×
6	×	×	×	×	×	×

問題4 3人の人がじゃんけんを1回だけするとき，あいことなる場合の数は何通りありますか．

9 通り ○

採点する やり直す HELP

「あいこ」となるのは，(A)「全員同じ手を出した場合」(B)「全員異なる手を出した場合」の2つの場合があります．
(A)全員同じ手を出す場合：ぐぐぐ，ちちち，ぱぱぱ→3通り
(B)全員異なる手を出す場合：ぐちぱ，ぐぱち，ちぐぱ，ちぱぐ，ぱぐち，ぱちぐ→6通り
和の法則により，3+6=9通り

問題5 次の関係を満たす整数解 x,y,z の組は何通りありますか．

問題6 次の関係を満たす整数解 x,y,z の組は何通りありますか．

$$\begin{cases} x+y+z=5 & \cdots(1) \\ 2x+y=5 & \cdots(2) \\ 0\leqq x,y,z\leqq 5 & \cdots(3) \end{cases}$$

3 通り ○

採点する やり直す HELP

(1)(2)は方程式ですが(3)は方程式ではないので，未知数3個に対して方程式が2個しかないことになり，解は1つには定まりませんが「整数解」ということなので解けます．

(1)(2)を見ると5つのお菓子をx,y,z の3人に配ることをイメージすると分かりやすいでしょう．ただし，(3)により1つももらわない人がいてもよく，全部もらう人がいてもよいことになります．

このような問題では(2)式で $2x...=5$ となっていることに目を付けると（全部で5つしかないのにx が2つずつ食べるので，たちまち上限に達してしまう），$x=0,1,2$ の場合しかないことになり，場合分けが少なくて済みます．

(i) $x=0$ のとき，(2)より$y=5$，(1)より$z=0$

(ii) $x=1$ のとき，(2)より$y=3$，(1)より$z=1$

(iii) $x=2$ のとき，(2)より$y=1$，(1)より$z=2$

(*) $x\geqq 3$ のとき，(2)より$y<0$ となって解はない

以上により，3通り

【要点】
係数が大きな文字で場合分けする

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots(1) \\ 2x+y-z=3 & \cdots(2) \\ 0\leqq x,y,z\leqq 6 & \cdots(3) \end{cases}$$

2 通り ○

採点する やり直す HELP

(1)(2)は方程式ですが(3)は方程式ではないので，未知数3個に対して方程式が2個しかないことになり，解は1つには定まりませんが「整数解」ということなので解けます．

(2)を見ると3個しかないお菓子をx,y が食べ尽くすのは早いのですが，z が足を引っ張っていますので，(1)(2)を使って食べ尽くし型（和だけの式）にしておくと使いやすくなります．

(1)+(2)：$3x+2y=9$ …(4)

このような問題ではx の値で場合分けすると，場合分けが少なくて済みます．（9個しかないお菓子をx が3個ずつ食べるので，すぐに上限に達してしまう）

(i) $x=0$ のとき，(4)より $2y=9$ →整数解はない

(ii) $x=1$ のとき，(4)より$y=3$，(1)より$z=2$

(iii) $x=2$ のとき，(4)より $2y=3$ →整数解はない

(iv) $x=3$ のとき，(4)より$y=0$，(1)より$z=3$

(*) $x\geqq 4$ のとき，(4)より$y<0$ となって解はない

以上により，2通り